EXERCICE 1 : a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$: pour $x>0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x^2+1} = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)+x}{3x-2}$; on sait que pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc pour $x>1$,
$\dfrac{-1+x}{3x-2} \leq \dfrac{\cos(x)+x}{3x-2} \leq \dfrac{1+x}{3x-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1+x}{3x-2} = \dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{3x-2} = \dfrac{1}{3}$;
donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)+x}{3x-2} = \dfrac{1}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2+3}$: on factorise le numérateur et le dénominateur par x : $\dfrac{x(1-\frac{1}{x})}{x(x+\frac{3}{x})} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{x+\frac{3}{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\dfrac{1}{x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\dfrac{3}{x}) = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x^2+3} = 0$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$.

1. La fonction dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{1(x-3)-1(x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-4}{(x-3)^2} < 0$, donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;3[$ et sur $]3\,;+\infty[$.

2. on factorise le numérateur et le dénominateur par x : $\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$;

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-\dfrac{3}{x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

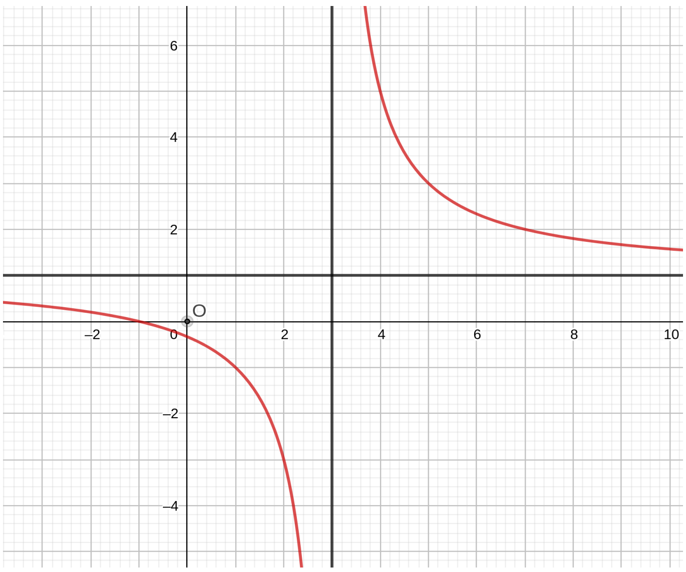
$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x+1) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-3) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (x+1) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (x-3) = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -\infty$.

3. Tableau de variations :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

3. D'après la question 2, la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe C_f;
la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe C_f;



<u>EXERCICE 3</u> : On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

1. La fonction dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{4(x^2+1)-4x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$;

le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur $-4x^2 + 4$ qui s'annule en 1 et -1 ;
d'où $f'(x) \geq 0$ sur $[-1 ; 1]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $]-\infty ; -1]$ U $[1 ; +\infty[$;
donc la fonction f est croissante sur $[-1 ; 1]$ et décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[1 ; +\infty[$.

2. on factorise le dénominateur par x : $\dfrac{4x}{x^2+1} = \dfrac{4x}{x(x+\frac{1}{x})} = \dfrac{4}{x+\frac{1}{x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\dfrac{1}{x}) = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+\dfrac{1}{x}) = -\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
ainsi, la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe C_f;

3. Le tableau de variations de la fonction f :
$f(1) = \dfrac{4\times1}{1^2+1} = 2$; $f(-1) = \dfrac{4\times(-1)}{(-1)^2+1} = -2$;

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	2	↘	0

4. Une équation de la tangente à la courbe C_f représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 4x + 0 = 4x$.

5. Pour montrer que cette tangente est au-dessus de la courbe C_f pour x positif, on étudie le signe de la différence $f(x) - 4x = \dfrac{4x}{x^2+1} - 4x = \dfrac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1} = \dfrac{-4x^3}{x^2+1}$; le signe de cette différence est le signe de $-4x^3$ qui a le signe contraire de x; donc si $x \geq 0$, $x^3 \geq 0$, $-4x^3 \leq 0$ et $f(x) - 4x \leq 0$, et la tangente est au-dessus de la courbe C_f .

Bonus : Si $x \leq 0$, $x^3 \leq 0$, $-4x^3 \geq 0$ et $f(x) - 4x \geq 0$, et la courbe C_f est au-dessus de la tangente.