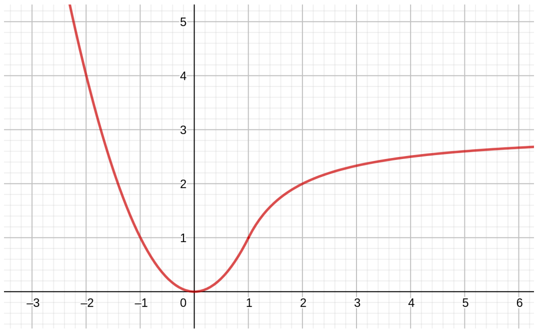

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \begin{cases} x^2 \; sur \;]-\infty ; 1[\\ 3 - \dfrac{2}{x} \; sur \; [1 ; +\infty[\end{cases}$ et sa courbe représentative donnée ci-contre :

1. La fonction f est continue sur les intervalles $] - \infty ; 1]$ et $[1 ; +\infty [$ car $x \to x^2$ et $x \to 3 - \dfrac{2}{x}$ sont des fonctions continues sur leur ensemble de définition. Il reste à étudier la continuité en 1 : $f(1) = 3 - 2 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 = 1 = f(1)$; donc f est continue en 1 et donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est dérivable sur les intervalles $] - \infty ; 1]$ et $[1 ; +\infty [$ car $x \to x^2$ et $x \to 3 - \dfrac{2}{x}$ sont des fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. Il reste à étudier la dérivabilité en 1 : sur $[1 ; +\infty [$ $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$, donc $f'(1) = 2$ et sur $] - \infty ; 1[$, $f'(x) = 2x$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 2x = 2 = f'(1)$; donc f est dérivable en 1 et donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 : 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

a) $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 = x^3(2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3})$; d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$,

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et par somme et produit de limites.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty$ et par somme de limites.

b) $g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$ qui s'annule en 0 et en 1 et est du signe de $a = 6$ sur $]- \infty ; - 1]$ et $[0 ; +\infty[$.
Donc la fonction g est croissante sur $]- \infty ; - 1]$ et sur $[0 ; +\infty[$, et décroissante sur $[- 1 ; 0]$.
c) On a $g(- 1) = 2$. Sur l'intervalle $[- 1 ; +\infty[$, la fonction g admet un minimum égal à 1 donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
Sur $]- \infty ; - 1]$, la fonction g est continue comme polynôme et strictement croissante de $]- \infty ; - 1]$ dans $]- \infty ; 2]$; par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]- \infty ; - 1]$ et donc dans $\mathbb{R}$.
d) A l'aide de la calculatrice, on trouve une valeur approchée de α à 10^{-2} près : $\alpha \simeq -1{,}68$.
e) Le signe de g : Sur $]- \infty ; \alpha]$, $g(x) \leq 0$ et sur $[\alpha ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1 - \dfrac{1}{x}$.

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1 - \dfrac{1}{x} = x^2(1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3})$; d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et par somme et produit de limites.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et par somme de limites.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} (x^2+3x+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et par somme de limites.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} (x^2+3x+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et par somme de limites.

b) La fonction dérivée de f est $f'(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3+3x^2+1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ puisque le dénominateur est strictement positif.

c) On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$, croissante sur $[\alpha\ ;\ 0[$, et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

d) Le tableau de variations de f :

On a $f(\alpha) = \alpha^2 + 3\alpha + 1 - \dfrac{1}{\alpha} \simeq -0{,}62$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$	$\|\ -\infty$	↗	$+\infty$

3. a) D'après le tableau de variations de la fonction f, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ est 3. Appelons-les x_1 , x_2 , x_3 .

b) A l'aide de la calculatrice, on trouve

$-4 < x_1 < -3$; $-1 < x_2 < 0$; $0 < x_3 < 1$.