NOM : .... PRÉNOM : ....

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 TERMINALE S 710 *Mardi 11 décembre 2018 (A)*

EXERCICE 1 (9 points)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.

a) Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$ et sa courbe représentative C dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ du plan.

a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)e^{-x}$.

c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

e) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. a) Montrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Dans la question suivante, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b) Étudier la position relative de la droite T et de la courbe C.

EXERCICE 2 (5 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$.

1. On considère l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$.

a) Montrer que $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$.

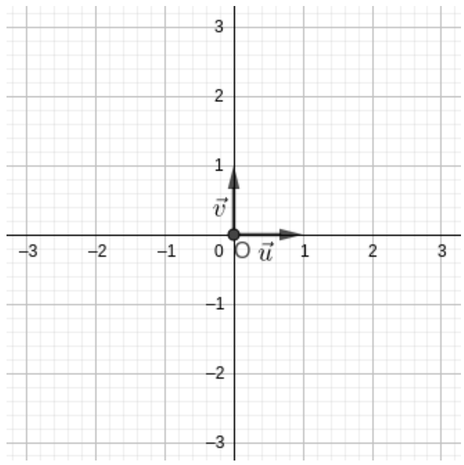
b) Déterminer les solutions de (E).

Les solutions complexes seront appelées z_A et z_B et la solution réelle z_C.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Placer les points A, B et C sur la figure ci-contre.

3. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.



EXERCICE 3 (6 points)

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$, et l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = iz + 1 - i$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, $2 - i$ et $1 + 2i$.

1. Montrer que le point A est un point invariant par f c'est-à-dire que $f(A) = A$.

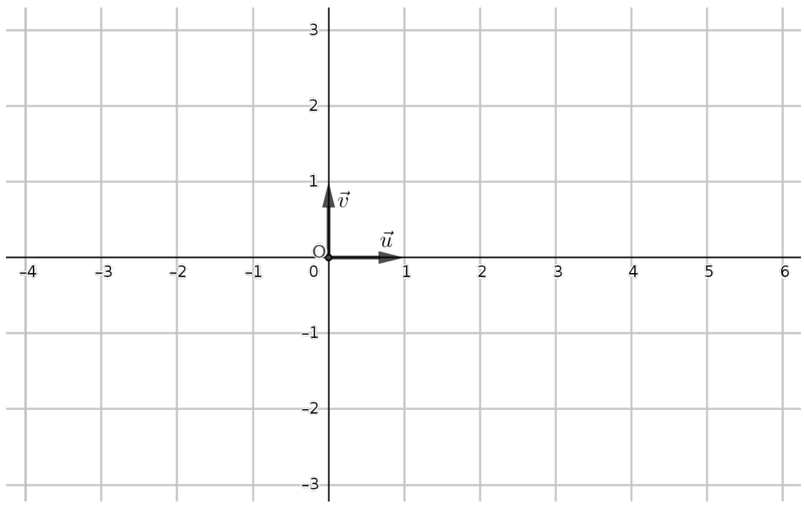
2. Calculer les affixes des points B' et C' images de B et C par f .

3. Placer les points A, B et C et les images B' et C'.

4. Montrer que le triangle ABB' est rectangle en A.

5. On admet que ACC' est aussi rectangle en A.

Pour tout point M du plan, a-t-on AMM' rectangle ?



NOM : .... PRÉNOM : ....

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 TERMINALE S 710 *Mardi 11 décembre 2018 (B)*

EXERCICE 1 (9 points)

1. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 - x + e^x$.

a) Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur IR.

c) En déduire le signe de la fonction g sur IR.

2. On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x + 2 + \dfrac{x}{e^x}$ et sa courbe représentative C dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ du plan.

a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = g(x)e^{-x}$.

c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR.

e) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3. a) Montrer que la droite T d'équation $y = 2x + 2$ est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Dans la question suivante, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b) Étudier la position relative de la droite T et de la courbe C.

EXERCICE 2 (5 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$.

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.

a) Montrer que $z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$.

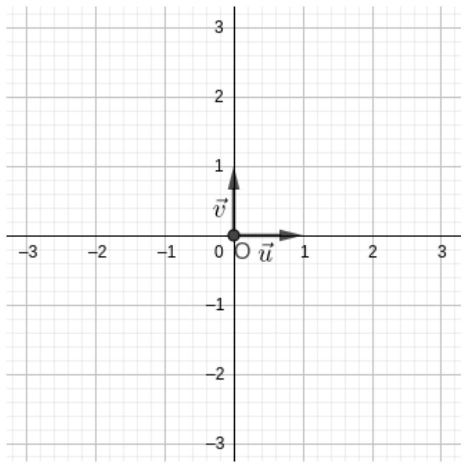
b) Déterminer les solutions de (E).

Les solutions complexes seront appelées z_A et z_B et la solution réelle z_C.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Placer les points A, B et C sur la figure ci-contre.

3. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.



EXERCICE 3 (6 points)

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$, et l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = iz - 1 + i$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives -1, $2 + i$ et $-1 + i$.

1. Montrer que le point A est un point invariant par f c'est-à-dire que $f(A) = A$.

2. Calculer les affixes des points B' et C' images de B et C par f .

3. Placer les points A, B et C et les images B' et C'.

4. Montrer que le triangle ABB' est rectangle en A.

5. On admet que ACC' est aussi rectangle en A.

Pour tout point M du plan, a-t-on AMM' rectangle ?