EXERCICE 1 : 1. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 - x + e^x$.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

En $+\infty$, on obtient un forme indéterminée ; on factorise $g(x)$ par x : $g(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (propriété vue en cours), donc par somme et produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) La fonction g est une fonction dérivable sur IR comme somme de fonctions dérivables sur IR ;
et $g'(x) = -1 + e^x$. On a $-1 + e^x \geq 0$ équivaut à $e^x \geq 1$ équivaut à $x \geq 0$.
Donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$. Ainsi g admet un minimum atteint en $x = 0$ qui vaut $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$.
c) Le minimum de g est 2, donc g est strictement positive sur IR.

2. On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$ et sa courbe représentative C dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ du plan.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$) donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est une fonction dérivable sur IR comme somme de fonctions dérivables sur IR ;
et $f'(x) = 1 + \frac{1\times e^x - x\,e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x+1-x}{e^x} = (1 - x + e^x)e^{-x} = g(x)e^{-x}$.

c) On sait que pour tout x réel, $g(x) > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur IR.
Le tableau de variations :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

d) La fonction f est continue et strictement croissante de IR dans IR.
De plus $0 \in$ IR, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR.
e) La calculatrice nous donne $\alpha = -0{,}4$ à 10^{-2} près.

3. a) L'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = g(0)e^0\,x + 1 = 2x + 1$.

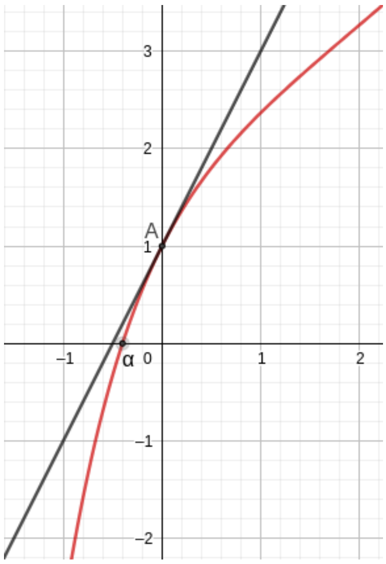
b) Pour étudier la position relative de la droite T et de la courbe C, on étudie le signe de $f(x) - (2x + 1) =$
$x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) = \frac{x}{e^x} - x = x\left(\frac{1}{e^x} - 1\right) = x(e^{-x} - 1)$.

On a $e^{-x} - 1 > 0$ équivaut à $e^{-x} > 1$ équivaut à $\frac{1}{e^x} > 1$ équivaut à $e^x < 1$ équivaut à $x < 0$.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$e^{-x} - 1$	$+$	0	$-$
$f(x) - (2x + 1)$	$-$		$-$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) - (2x + 1) \leq 0$, et la courbe C est en-dessous de la tangente T.



EXERCICE 2 : On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. On considère l'équation (E) : $z^3 + 8 = 0$.

a) On développe $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$.

b) D'où (E) est équivalente à $(z + 2)(z^2 - 2z + 4) = 0$.

On obtient les deux équations : $z + 2 = 0$ donne la solution $z = -2$.

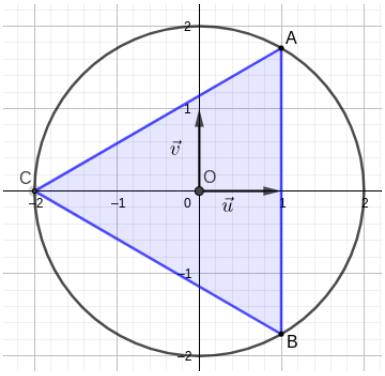
et $z^2 - 2z + 4 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times1\times4 = -12 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes:

$z_1 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; et $z_2 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

On obtient $z_A = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et la solution réelle $z_C = -2$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Les points A(1 ; $\sqrt{3}$), B(1 ; $-\sqrt{3}$) et C(− 2 ; 0) sur la figure ci-contre :



3. Le triangle ABC est équilatéral ; en effet

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{0+4\times3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

AC = $\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

BC = $\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(-2-1)^2+(0+\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Donc AB = AC = BC.

EXERCICE 3 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), et l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, 2 − i et 1 + 2i .

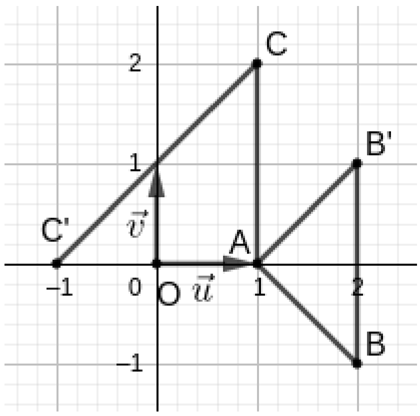
1. Comme $z_A = 1$, $z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i}\times1 + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} = 1 = z_A$, donc $f(A) = A$ et A est invariant par f.

2. Les affixes des points B' et C' images de B et C par f :

$z_B = 2 - \mathrm{i}$, donc $z' = \mathrm{i}(2 - \mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} = 2\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 + 1 - \mathrm{i} = 2\mathrm{i} + 1 + 1 - \mathrm{i} = 2 + \mathrm{i} = z_{B'}$;

$z_C = 1 + 2\mathrm{i}$, donc $z' = \mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i} - 2 + 1 - \mathrm{i} = -1 = z_{C'}$;

3. Les points A, B et C et les images B' et C':



4. Pour montrer que le triangle ABB' est rectangle en A, on calcule les longueurs :

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

AB' = $\sqrt{(x_{B'}-x_A)^2+(y_{B'}-y_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

BB' = $\sqrt{(x_{B'}-x_B)^2+(y_{B'}-y_B)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$.

On a $AB^2 + AB'^2 = BB'^2$, donc le triangle ABB' est rectangle en A, il est aussi isocèle en A.

5. On admet que ACC' est aussi rectangle en A.

On poe M(x ; y), soit $z = x + \mathrm{i}y$;

$z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i} = z' = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i}x - y + 1 - \mathrm{i} = 1 - y + \mathrm{i}(x - 1)$;

ainsi M'($1 - y$; $x - 1$). On calcule les carrés des longueurs AM, AM' et MM' et on utilise le théorème de Pythagore :

$AM^2 = (x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2 = (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = (x - 1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$;

$AM'^2 = (x_{M'}-x_A)^2+(y_{M'}-y_A)^2 = (1-y-1)^2+(x-1-0)^2 = y^2 + (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$;

$MM'^2 = (x_{M'}-x_M)^2+(y_{M'}-y_M)^2 = (1 - y - x)^2 + (x - 1 - y)^2 =$

$(1 + y^2 + x^2 - 2y - 2x + 2xy) + (x^2 + 1 + y^2 - 2x - 2xy + 2y) = 2x^2 + 2y^2 + 2 - 4x$;

On obtient $AM^2 + AM'^2 = MM'^2$;

donc pour tout point M du plan, le triangle AMM' est rectangle et isocèle en A.

EXERCICE 1 : 1. On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = 1 - x + e^x$.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

En $+\infty$, on obtient un forme indéterminée ; on factorise $g(x)$ par x : $g(x) = x(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x})$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (propriété vue en cours), donc par somme et produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) La fonction g est une fonction dérivable sur IR comme somme de fonctions dérivables sur IR ;
et $g'(x) = -1 + e^x$. On a $-1 + e^x \geq 0$ équivaut à $e^x \geq 1$ équivaut à $x \geq 0$.
Donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $]0 ; +\infty[$. Ainsi g admet un minimum atteint en $x = 0$ qui vaut $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$.
c) Le minimum de g est 2, donc g est strictement positive sur IR.

2. On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x + 2 + \frac{x}{e^x}$ et sa courbe représentative C dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ (car $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$) donc par somme de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est une fonction dérivable sur IR comme somme de fonctions dérivables sur IR ;
et $f'(x) = 1 + \frac{1 \times e^x - x\,e^x}{(e^x)^2} = 1 + \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x + 1 - x}{e^x} = (1 - x + e^x)e^{-x} = g(x)e^{-x}$.

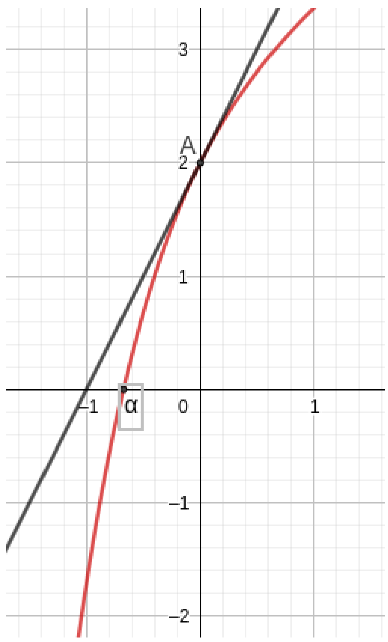
c) On sait que pour tout x réel, $g(x) > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur IR.
Le tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d) La fonction f est continue et strictement croissante de IR dans IR.
De plus $0 \in$ IR, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans IR.
e) La calculatrice nous donne $\alpha = -0{,}67$ à 10^{-2} près.

3. a) L'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est
$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = g(0)e^0\,x + 2 = 2x + 2$.

b) Pour étudier la position relative de la droite T et de la courbe C, on étudie le signe de $f(x) - (2x + 2) =$
$x + 2 + \frac{x}{e^x} - (2x + 2) = \frac{x}{e^x} - x = x(\frac{1}{e^x} - 1) = x(e^{-x} - 1)$.



On a $e^{-x} - 1 > 0$ équivaut à $e^{-x} > 1$ équivaut à $\frac{1}{e^x} > 1$ équivaut à $e^x < 1$

équivaut à $x < 0$.
D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x	$-$	0	+
$e^{-x} - 1$	+	0	$-$
$f(x) - (2x + 1)$	$-$		$-$

Ainsi, pour tout réel x,
$f(x) - (2x + 2) \leq 0$,
et la courbe C est en-dessous de la tangente T.

EXERCICE 2 : On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$.

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 8 = 0$.

a) On développe $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = z^3 + 2z^2 + 4z - 2z^2 - 4z - 8 = z^3 - 8$.

b) D'où (E) est équivalente à $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$.

On obtient les deux équations : $z - 2 = 0$ donne la solution $z = 2$.

et $z^2 + 2z + 4 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times4 = -12 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes:

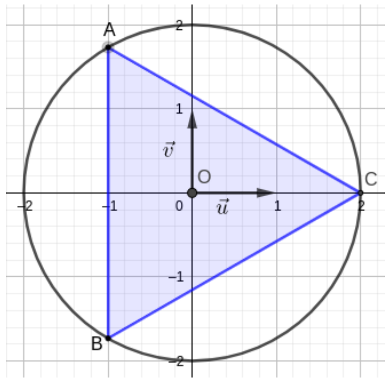
$z_1 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+\mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$;

et $z_2 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\mathrm{i}\sqrt{12}}{2} = \dfrac{-2-2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

On obtient $z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et la solution réelle $z_C = 2$.

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C.

Les points $A(-1\ ;\ \sqrt{3}\ )$, $B(-1\ ;\ -\sqrt{3}\ )$ et $C(2\ ;\ 0)$ sur la figure ci-contre :



3. Le triangle ABC est équilatéral ; en effet

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(-1+1)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{0+4\times3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(0-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(0+\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Donc AB = AC = BC.

EXERCICE 3 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$, et l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives -1, $2 + \mathrm{i}$ et $-1 + \mathrm{i}$.

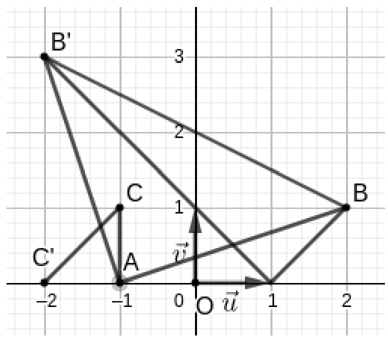
1. Comme $z_A = -1$, $z' = \mathrm{i}z + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i}\times(-1) - 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i} - 1 + \mathrm{i} = -1 = z_A$, donc $f(A) = A$ et A est invariant par f.

2. Les affixes des points B' et C' images de B et C par f :

$z_B = 2 + \mathrm{i}$, donc $z' = \mathrm{i}(2 + \mathrm{i}) - 1 + \mathrm{i} = 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 1 + \mathrm{i} = 2\mathrm{i} - 1 - 1 + \mathrm{i} = -2 + 3\mathrm{i} = z_{B'}$;

$z_C = -1 + \mathrm{i}$, donc $z' = \mathrm{i}(-1 + \mathrm{i}) - 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i} - 1 - 1 + \mathrm{i} = -2 = z_{C'}$;

3. Les points A, B et C et les images B' et C':



4. Pour montrer que le triangle ABB' est rectangle en A, on calcule les longueurs :

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$;

$AB' = \sqrt{(x_{B'}-x_A)^2+(y_{B'}-y_A)^2} = \sqrt{(-2+1)^2+(3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$;

$BB' = \sqrt{(x_{B'}-x_B)^2+(y_{B'}-y_B)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

On a $AB^2 + AB'^2 = 10 + 10 = 20 = BB'^2$, donc le triangle ABB' est rectangle en A,

il est aussi isocèle en A.

5. On admet que ACC' est aussi rectangle en A.

On poe $M(x\ ;\ y)$, soit $z = x + \mathrm{i}y$;

$z' = \mathrm{i}z - 1 + \mathrm{i} = z' = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) - 1 + \mathrm{i} = \mathrm{i}x - y - 1 + \mathrm{i} = -1 - y + \mathrm{i}(x + 1)$; ainsi $M'(-1 - y\ ;\ x + 1)$.

On calcule les carrés des longueurs AM, AM' et MM' et on utilise le théorème de Pythagore :

$AM^2 = (x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 = (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$;

$AM'^2 = (x_{M'}-x_A)^2+(y_{M'}-y_A)^2 = (-1-y+1)^2+(x+1-0)^2 = y^2 + (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$;

$MM'^2 = (x_{M'}-x_M)^2+(y_{M'}-y_M)^2 = (-1 - y - x)^2 + (x + 1 - y)^2 =$

$(1 + y^2 + x^2 + 2y + 2x + 2xy) + (x^2 + 1 + y^2 + 2x - 2xy - 2y) = 2x^2 + 2y^2 + 2 + 4x$;

On obtient $AM^2 + AM'^2 = MM'^2$;

donc pour tout point M du plan, le triangle AMM' est rectangle et isocèle en A.