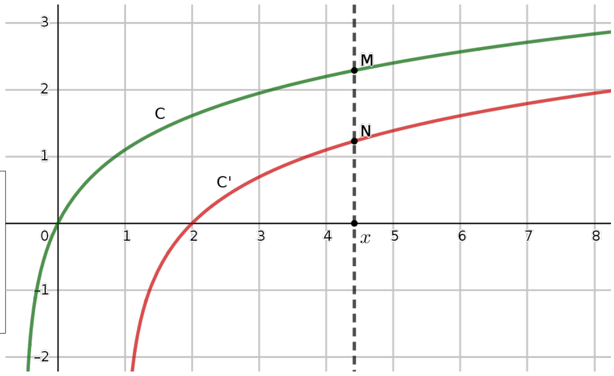
EXERCICE 1 (5 points)

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{2x+1}{x}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de f et étudier les variations de f.
2. Calculer la limite de f en 0 et en $+\infty$; quelle est la conséquence graphique ?
3. Dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE 2 (4 points)

Les courbes C et C' ci-contre sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(2x+1)$ et $g(x) = \ln(x-1)$.



1. Les courbes C et C' se coupent-elles ? Justifier la réponse.
2. Soit $x \in]1 ; +\infty[$, M et N sont les points d'abscisse x respectivement sur C et C'.
Quelle est la limite de MN lorsque x tend vers $+\infty$?
3. On donne l'algorithme ci-contre :

```
n ← 2
Tant que  f(n) − g(n) − ln(2) ≥ 0,1 :
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

a) Donner la valeur de n affichée en sortie de l'algorithme.
b) Que représente cette valeur de n ?

EXERCICE 3 (5 points)

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.
Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.
Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.
La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p.
Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement« Romane se déplace en vélo ».

1. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
2. Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est $P(V) = 0{,}3\,p + 0{,}6$.
3. On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

a. Calculer la valeur de p.
b. Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, quelle est la probabilité que la journée soit ensoleillée ?

EXERCICE 4 (6 points)

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,25 ;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est 0,5 ;
- La probabilité de gagner la première partie est 0,25.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n ème partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = 0{,}25$.

1. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}25p_n + 0{,}5$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = p_n - 0{,}4$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 0{,}4 - 0{,}15(-0{,}25)^{n-1}$.
c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.