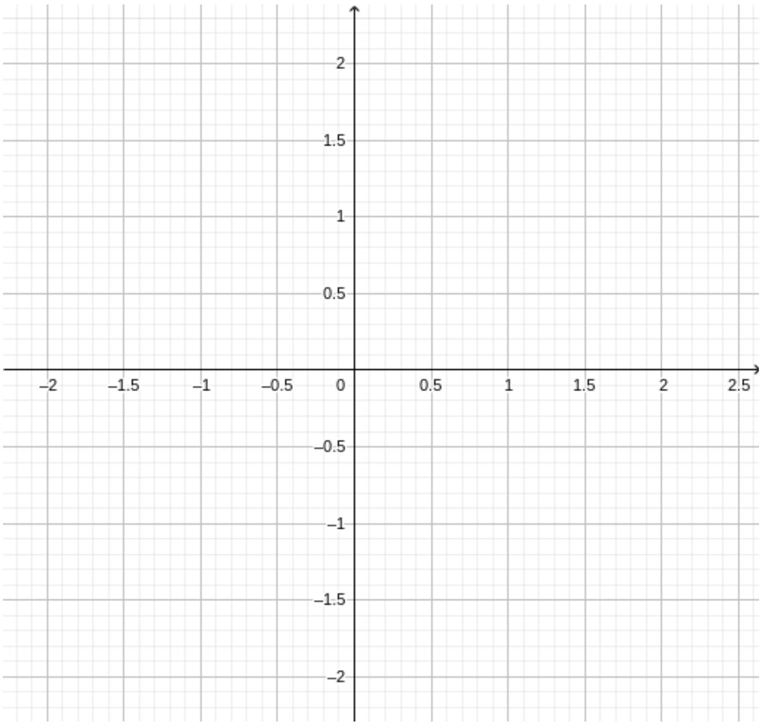
NOM : .... PRÉNOM : ....
DEVOIR SURVEILLÉ N° 8 TERMINALE S 710 *Mardi 2 avril 2019*

EXERCICE 1 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). Le point A_0 a pour affixe $a_0 = 2$.
Pour tout entier naturel n, on définit les nombres complexes a_n par $a_{n+1} = \omega a_n$
où ω est le nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

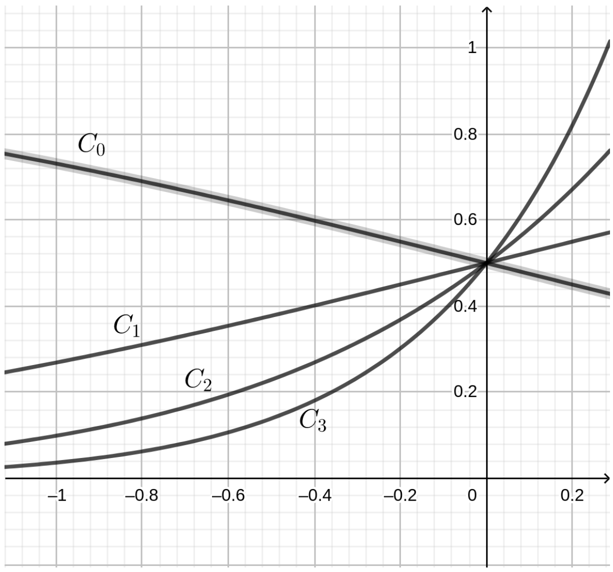
1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère les points A_n d'affixes a_n .
a) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de ω. En déduire les formes algébriques et exponentielles de a_1 , a_2 et a_3 .
b) En déduire que a_3 est un nombre réel.
c) Sur le graphique ci-contre, construire les points A_0, A_1, A_2, A_3 (laisser les traits de construction).



2. a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{a_0 - a_1}{a_3 - a_1}$.
b) En déduire une mesure de l'angle ($\overrightarrow{A_1A_3}$; $\overrightarrow{A_1A_0}$).
c) En déduire la nature du triangle $A_0A_1A_3$.
3. Quelle est la nature du triangle $A_0A_2A_4$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels ℝ par $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}$. On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On a représenté ci-contre des courbes C_n pour différentes valeurs de n.



Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$.

Partie A - Étude graphique
1. Donner une interprétation graphique de u_n .
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B - Étude théorique
1. Montrer que $u_1 = \ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_0 .
3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f_{n+1}(x) + f_n(x) = e^{nx}$.
b) En déduire le calcul de $u_{n+1} + u_n$.
4. a) Montrer que, pour $x \in [-1 ; 0]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
b) En déduire les variations de la suite (u_n).
c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente (on ne demande pas de calculer la limite de u_n).

EXERCICE 3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^2}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

2. Justifier que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C.

3. Justifier que la fonction f est positive sur $[1\ ;+\infty[$.

4. On désigne par F la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-3-2\ln(x)}{x}$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;+\infty[$.

5. Soit a un réel strictement supérieur à 1.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $I(a) = \int_1^a f(x)\,dx$.

b) Déterminer $I(a)$ en fonction de a.

c) Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$.