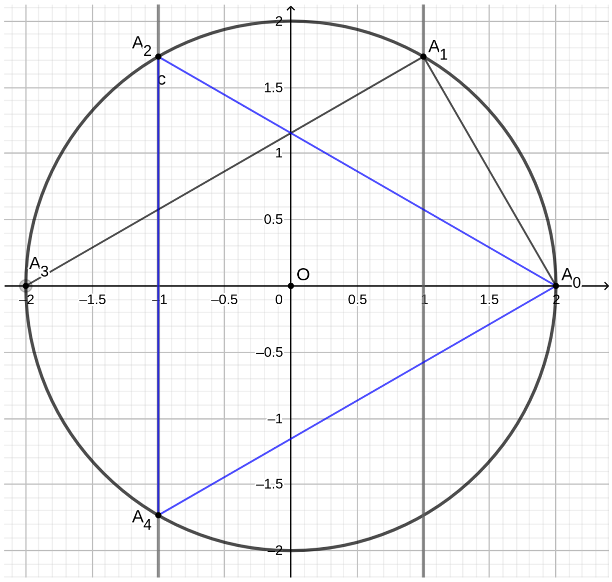


EXERCICE 1 :
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Le point A_0 a pour affixe $a_0 = 2$.
Pour tout entier naturel n, on définit les nombres complexes a_n par $a_{n+1} = \omega a_n$
où ω est le nombre complexe $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Pour tout entier naturel n non nul,
on considère les points A_n d'affixes a_n .

a) $|\omega| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1.$

Soit $\vartheta = \arg(\omega)$; $\cos(\vartheta) = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\vartheta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

d'où $\vartheta = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$; Ainsi $\omega = \cos(\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{3}) = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où $a_1 = \omega a_0 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$,

$a_2 = \omega a_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$, et $a_3 = \omega a_2 = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\,e^{i\pi} = -2.$

b) Comme $a_3 = -2$, on en déduit que a_3 est un nombre réel.

c) Construction des points A_0, A_1, A_2, A_3 à l'aide du cercle de centre O et de rayon 2.

2. a) $\dfrac{a_0-a_1}{a_3-a_1} = \dfrac{2-(1+i\sqrt{3})}{-2-(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}} = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})}{(-3-i\sqrt{3})(-3+i\sqrt{3})} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-(i\sqrt{3})^2}{9+3} = \dfrac{-3+4i\sqrt{3}+3}{12}$

$= \dfrac{i\sqrt{3}}{3}$ qui est imaginaire pur.

b) On sait que ($\overrightarrow{A_1A_3}$; $\overrightarrow{A_1A_0}$) $= \arg\left(\dfrac{a_0-a_1}{a_3-a_1}\right) = \arg\left(\dfrac{i\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

c) Ainsi le triangle $A_0A_1A_3$ est rectangle en A_1.

3. Le triangle $A_0A_2A_4$ est équilatéral : on détermine $a_4 = \omega a_3 = -2\,e^{i\frac{\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3}$.

$A_0A_2 = |a_2 - a_0| = |-1 + i\sqrt{3} - 2| = |-3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;

$A_2A_4 = |-1 + i\sqrt{3} - (-1 - i\sqrt{3})| = |2i\sqrt{3}| = \sqrt{0^2+(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$;

$A_0A_4 = |a_4 - a_0| = |-1 - i\sqrt{3} - 2| = |-3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Les trois côtés sont bien de même longueur.

EXERCICE 2 : Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels ℝ par
$f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{e^x+1}$. On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$.

Partie A - Étude graphique

1. Une interprétation graphique de u_n : Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n(x)$ est strictement positive puisque e^x l'est ; donc u_n est l'aire du domaine délimité par la courbe C_n , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$ (axe des ordonnées).

2. Conjectures : la suite (u_n) semble décroissante et converger vers 0.

Partie B - Étude théorique

1. $u_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_{-1}^{0} = \ln(e^0 + 1) - \ln(e^{-1} + 1) = \ln\left(\frac{2}{e^{-1}+1}\right) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

2. $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_{-1}^{0} f_0(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (f_0(x)+f_1(x))\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1+e^x}{e^x+1}\,dx = \int_{-1}^{0} 1\,dx = \left[x\right]_{-1}^{0} = 0 - (-1) = 1.$

Ainsi $u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln(e) - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln\left(e \times \frac{e+1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

3. a) Pour tout entier naturel n,

$$f_{n+1}(x) + f_n(x) = \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1} + \frac{e^{nx}}{e^x+1} = \frac{e^{nx+x}+e^{nx}}{e^x+1} = \frac{e^{nx}\times e^x + e^{nx}}{e^x+1} = \frac{e^{nx}(e^x+1)}{e^x+1} = e^{nx}.$$

b) Ainsi $u_{n+1} + u_n = \int_{-1}^{0} f_{n+1}(x)\,dx + \int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (f_{n+1}(x)+f_n(x))\,dx = \int_{-1}^{0} e^{nx}\,dx$ par linéarité de l'intégrale ; $\int_{-1}^{0} e^{nx}\,dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{n}e^0 - \frac{1}{n}e^{-n} = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

4. a) Pour $x \in [-1 ; 0]$, $e^x \leq e^0$ (la fonction exponentielle est croissante) $\Rightarrow$ (on multiplie par e^{nx}) $e^{nx} e^x \leq e^{nx} \Rightarrow e^{(n+1)x} \leq e^{nx} \Rightarrow \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \Rightarrow f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \int_{-1}^{0} f_{n+1}(x)\,dx \leq u_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)\,dx$, et la suite (u_n) est décroissante.

c) Pour tout entier naturel n, la fonction $f_n(x) \geq 0$, donc $u_n \geq 0$.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

<u>EXERCICE 3 :</u> Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^2}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont ;

$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}\times x^2-(1+2\ln(x))2x}{x^4} = \frac{2x-2x-4x\ln(x)}{x^4} = \frac{-4\ln(x)}{x^3}$; sur $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-4\ln(x)$; on sait que $\ln(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$, donc $-4\ln(x) \leq 0$ et $f'(x) \leq 0$; ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. Pour justifier que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C, on détermine la limite de f en $+\infty$:

On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2\ln(x)}{x^2}$; On sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (résultat du cours) ; donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\times\frac{1}{x} = 0$; donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C.

3. Sur $[1 ; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$, donc $1 + 2\ln(x) \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$.

4. On désigne par F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-3-2\ln(x)}{x}$.

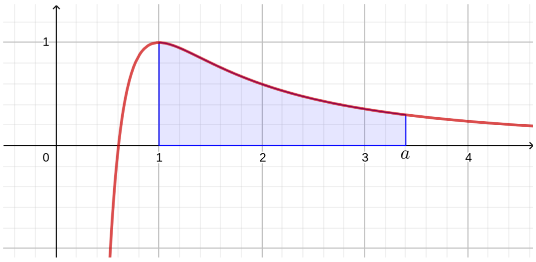
Pour démontrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$, on dérive cette fonction :

$$F'(x) = \frac{\frac{-2}{x}\times x-(-3-2\ln(x))\times 1}{x^2} = \frac{-2+3+2\ln(x)}{x^2} = \frac{1+2\ln(x)}{x^2} = f(x).$$

5. Soit a un réel strictement supérieur à 1.

a) Interprétation graphique de l'intégrale $I(a) = \int_1^a f(x)\,dx$:

la fonction f est positive sur $[1 ; a]$, alors $I(a)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$ (figure ci-contre).



b) $I(a) = F(a) - F(1) = \frac{-3-2\ln(a)}{a} - \frac{-3-2\ln(1)}{1} = 3 - \frac{3+2\ln(a)}{a} = 3 - \frac{3}{a} - \frac{2\ln(a)}{a}$.

c) On sait que $\lim_{a\to+\infty} \frac{3}{a} = 0$ et $\lim_{a\to+\infty} \frac{\ln(a)}{a} = 0$ (résultat du cours), donc $\lim_{a\to+\infty} I(a) = 3$.