NOM : ........................................................................... PRÉNOM : ..................................................................

DEVOIR SURVEILLÉ N° 9 TERMINALE S 710 *Mardi 7 mai 2019*

## EXERCICE 1 ( 7 points )

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$ , $\vec{v}$ ).

On prendra pour unité graphique le demi-centimètre.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2z + 2)(z - \sqrt{2}\,) = 0$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + \mathrm{i}$ , $z_B = \sqrt{2}$ et $z_C = 1 - \mathrm{i}$.

a. Écrire $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle et justifier que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

b. Faire une figure et placer les points A, B et C.

c. Déterminer une mesure de l'angle ( $\overrightarrow{OB}$ ; $\overrightarrow{OA}$ ).

3. On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$ .

a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.

b. En déduire une mesure de l'angle ( $\overrightarrow{OB}$ ; $\overrightarrow{OF}$ ).

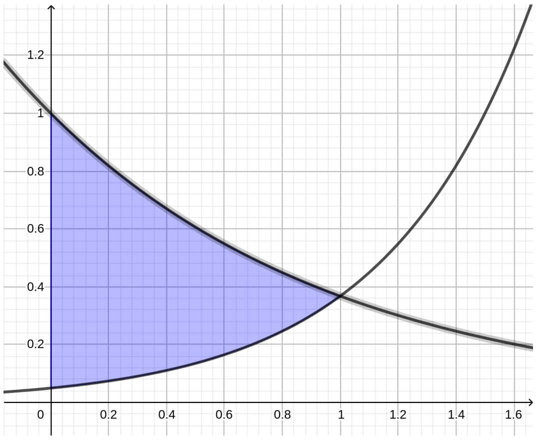
c. Calculer le module de $z_F$ et en déduire l'écriture de $z_F$ sous forme trigonométrique.

## EXERCICE 2 (3 points )

La figure ci-contre montre la représentation graphique de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x-3}$ et $g(x) = e^{-x}$.

1. Montrer que le point d'intersection des deux courbes a pour coordonnées $(1 \; ; \; e^{-1})$.

2. Déterminer la valeur exacte de l'aire grisée située entre les deux courbes et l'axe des ordonnées, en unité d'aires, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près.




## EXERCICE 3 ( 7 points )

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{1+e^{-2x}}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe C.

2. a) Déterminer la dérivée de la fonction $f$.

b) Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Montrer que la fonction $f$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$ .

b) En déduire une primitive de la fonction $f$.

c) Déterminer l'aire I($a$) du domaine plan délimité par la courbe C, la droite d'équation $y = 4$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

d) Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{I}(a)$ .

## EXERCICE 4 (3 points )

Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$ , $\vec{j}$ , $\vec{k}$ ) de l'espace, on considère les points A(1 ; 0 ; – 1), B(2 ; 1 ; 1), C(3 ; – 2 ; – 1) et D(4 ; 3 ; – 1).

1. Déterminer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

2. En déduire la nature du triangle ABC et une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ .

3. a) Montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC).

b) En déduire une équation du plan (ABC).