

EXERCICE 1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra pour unité graphique le demi-centimètre.

1. Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z^2 - 2z + 2)(z - \sqrt{2}) = 0$:

$z^2 - 2z + 2 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+2i}{2} = 1+i ; \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2-2i}{2} = 1-i.$$

$z - \sqrt{2} = 0$ donne $z = \sqrt{2}$; donc l'équation a trois solutions : $S = 1+i ; 1-i ; \sqrt{2}$ }

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+i$, $z_B = \sqrt{2}$ et $z_C = 1-i$.

a. $|z_A| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et $|z_C| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$;

soit $\vartheta_A = \arg(z_A)$; $\cos(\vartheta_A) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\vartheta_A) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; donc $\vartheta_A = \frac{\pi}{4}$;

et comme $z_C = \overline{z_A}$, donc $\arg(z_C) = -\frac{\pi}{4}$; donc $z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_C = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $z_B = \sqrt{2} e^{2i\pi}$.

On a $OA = OB = OC = \sqrt{2}$ puisque les modules de z_A , z_B et z_C sont égaux ; donc les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b. Les points A, B et C ci-contre :

c. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA}) = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(z_A) - \arg(z_B) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

3. On note F le point d'abscisse $z_F = z_A + z_B$.

a. Pour placer le point F sur la figure, on utilise la relation vectorielle : $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; donc OAFB est un parallélogramme ; de plus, $OA = OB$, donc OAFB est un losange.

b. Donc une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OF}) = (\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OA})/2 = \frac{\pi}{8} [2\pi]$.

Et comme $\overrightarrow{OB} = \sqrt{2} \vec{u}$, alors $(\vec{u} ; \overrightarrow{OF}) = \arg(z_F) = \frac{\pi}{8} [2\pi]$.

c. $z_F = z_A + z_B = 1+i + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} + i$;

le module de $z_F = |1 + \sqrt{2} + i| = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$;

d'où $z_F = \sqrt{4+2\sqrt{2}} (\cos(\frac{\pi}{8}) + i \sin(\frac{\pi}{8}))$.

EXERCICE 2 : La figure ci-contre montre la représentation graphique de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x-3}$ et $g(x) = e^{-x}$.

1. L'abscisse du point d'intersection des deux courbes vérifie l'équation

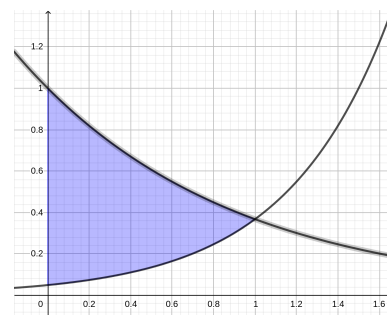
$f(x) = g(x)$, soit $e^{2x-3} = e^{-x}$ équivaut à $2x-3 = -x$ équivaut à $x = 1$;

et l'ordonnée est $g(1) = e^{-1}$.

2. Pour x dans $[0 ; 1]$, $3x-3 \leq 0$ soit $2x-3 \leq -x$ soit (la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$) $e^{2x-3} \leq e^{-x}$; donc $f(x) \leq g(x)$ sur $[0 ; 1]$.

L'aire grisée située entre les deux courbes et l'axe des ordonnées est égale à

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx &= \int_0^1 (e^{-x} - e^{2x-3}) dx = \left[-e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x-3} \right]_0^1 = \\ &= -e^{-1} - \frac{1}{2} e^{2 \times 1 - 3} - \left(-e^0 - \frac{1}{2} e^{2 \times 0 - 3} \right) = -e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-1} + 1 + \frac{1}{2} e^{-3} = \frac{-3}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-3} + 1 \approx 0,47 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.} \end{aligned}$$



EXERCICE 3 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{1+e^{-2x}}$ et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$; On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) La courbe C admet deux asymptotes horizontales d'équation $y = 0$ (en $-\infty$) et $y = 4$ (en $+\infty$).

2. a) La fonction f est de la forme $4 \frac{1}{u}$, de dérivée : $4 \frac{-u'}{u^2}$ avec $u(x) = e^{-2x}$;

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{-4(-2e^{2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{8e^{2x}}{(1+e^{-2x})^2}.$$

b) Le numérateur et le dénominateur de cette fonction dérivée sont strictement positifs puisque, pour tout réel x , $e^x > 0$; donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Pour tout réel x , on peut écrire $f(x) = \frac{4}{1+e^{-2x}} = \frac{4}{1+\frac{1}{e^{2x}}} = \frac{4}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}} = \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

b) Une primitive de la fonction f est $F(x) = 2\ln(e^{2x} + 1)$.

c) L'aire $I(a)$ du domaine plan délimité par la courbe C , la droite d'équation $y = 4$ et les droites d'équation $x = 0$

et $x = a$ est $\int_0^a (4 - f(x)) dx = [4x - F(x)]_0^a = 4a - 2\ln(e^{2a} + 1) - (4 \times 0 - 2\ln(2)) = 4a - 2\ln(e^{2a} + 1) + \ln(4)$.

d) On a $I(a) = \ln(e^{4a}) - \ln((e^{2a} + 1)^2) + \ln(4) = \ln\left(\frac{4e^{4a}}{(e^{2a} + 1)^2}\right) = \ln\left(\frac{4e^{4a}}{e^{4a} + 2e^{2a} + 1}\right) = \ln\left(\frac{4}{1 + 2e^{-2a} + e^{-4a}}\right)$;

on sait que $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-4a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-2a} = 0$, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \ln(4) = 2\ln(2)$.

EXERCICE 4 : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(1; 0; -1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; -2; -1)$ et $D(4; 3; -1)$.

1. On a $\vec{AB}(1; 1; 2)$, $\vec{AC}(2; -2; 0)$, $\vec{BC}(1; -3; -2)$. Donc

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 2 \times 0 = 0$ et $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-1) \times 1 + (-1) \times (-3) + (-2) \times (-2) = 6$.

2. Comme $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en A .

Pour trouver une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$, on utilise la formule : $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$.

On a $BA = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$;

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$;

donc $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{BA \times BC} = \frac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; donc $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) \approx 49,1^\circ$.

3. a) Pour montrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC) , on montre que le vecteur $\vec{BD}(2; 2; -2)$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (ABC) :

$\vec{BD} \cdot \vec{BC} = 2 \times 1 + 2 \times (-3) + (-2) \times (-2) = 0$ et $\vec{BD} \cdot \vec{AB} = 2 \times 1 + 2 \times 1 + (-2) \times 2 = 0$. Donc $\vec{BD}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{AB}$ non colinéaires du plan (ABC) ;

donc la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC) .

b) $\vec{BD}$ est un vecteur normal du plan (ABC) d'après la question précédente, donc une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + 2y - 2z + d = 0$; le point A appartient au plan (ABC) , donc $2x_A + 2y_A - 2z_A + d = 0$; soit $2 \times 1 + 2 \times 0 - 2 \times (-1) + d = 0$; soit $4 + d = 0$ soit $d = -4$.

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x + 2y - 2z - 4 = 0$, ou $x + y - z - 2 = 0$.