

Partie A : On considère le programme Python ci-contre :

1. L'algorithme pour $p = 2$:

p	u	k
2	1	0
2	-5	1
2	-9	2

```
p = int(input("p = "))
u = 1
for k in range(p) :
    u = u + 3**k - 7
print(u)
```

```
p = int(input("p = "))
u = 1
for k in range(p) :
    u = u + 3**k - 7
print(u)
```

Partie B : Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 3^n - 7$.

1. a) Modification de l'algorithme précédent pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p :

b) Le tableau des valeurs de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	-5	-9	-7	13	87	323	1045	3225

c) Conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) : la suite (u_n) est croissante à partir du rang 2.

2. Démontrons, par récurrence, que pour tout entier naturel n , la propriété (P_n) : $u_n = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2}$:

Initialisation : $u_0 = 1$ et $\frac{3^0}{2} - 7 \times 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} = 1$; donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel n , et montrons qu'elle est vraie pour

$$n+1 : u_{n+1} = u_n + 3^n - 7 = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2} + 3^n - 7 = \frac{3^n + 2 \times 3^n}{2} - 7(n+1) + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3^n \times 3}{2} + 3^n - 7(n+1) + \frac{1}{2} = \frac{3^{n+1}}{2} - 7(n+1) + \frac{1}{2} ; \text{ donc } (P_{n+1}) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : La propriété (P_n) est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n .

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{2} - 7n + \frac{1}{2}$.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) $v_n = u_{n+1} - u_n = u_n + 3^n - 7 - u_n = 3^n - 7$;

$v_{n+1} - v_n = (3^{n+1} - 7) - (3^n - 7) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n > 0$, donc $v_{n+1} > v_n$ pour tout entier naturel n , donc la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

On a $v_0 = u_1 - u_0 = -5 - 1 = -6$; $v_1 = u_2 - u_1 = -9 - (-5) = -4$; $v_2 = u_3 - u_2 = -7 - (-9) = 2$; et comme la suite est croissante, pour tout $n \geq 2$, $v_n \geq 2 > 0$.

b) De la question précédente, on a pour tout $n \geq 2$, $v_n = u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

4. A l'aide de l'algorithme précédent, la plus petite valeur de n telle que $u_n > 10^7$ est $n = 16$.

($u_{15} = 7174349$ et $u_{16} = 21523249$)

5. On conjecture que la limite de la suite (v_n) est $+\infty$ comme pour la suite (u_n) .

En utilisant les derniers résultats vus en cours, $n \rightarrow 3^n$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1, donc sa limite est $+\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 7 = +\infty$.

Pour $n \geq 16$, $u_n > 10^7$; on peut en déduire que la suite (u_n) est croissante et non majorée, donc elle tend vers $+\infty$.