Exercice 1 :

Partie A : On considère la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

```
n = .......
u = 0
for k in range(.....) :
    u = .......
    .......
```

1. a) Recopier et compléter le programme python ci-contre pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à 10.

b) Conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n).

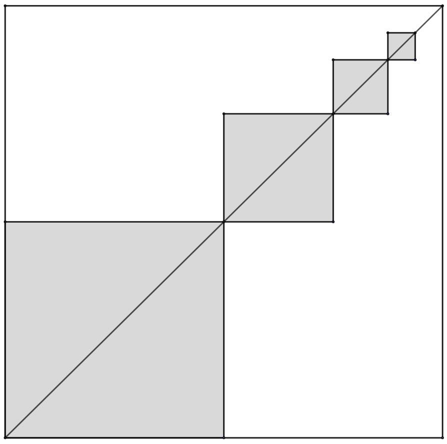
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

Partie B : On considère la suite numérique (v_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
2. Écrire v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.
3. Démonter alors les conjectures de la partie A.

Exercice 2 :

On considère un carré de côté 1. On construit un carré dont un sommet est le centre du carré comme sur la figure ci-contre. Puis on construit un carré dont le côté est la moitié du précédent, et ainsi de suite tel que un sommet du carré construit est toujours sur la diagonale du premier carré
(ces carrés sont grisés sur la figure ci-contre).



On note a_n = l'aire du n-ième carré construit à l'intérieur du carré de côté 1. Ainsi $a_1 = \dfrac{1}{4}$.

1. Déterminer la nature de la suite (a_n) et en déduire a_n en fonction de n.

2. On note S_n la somme des aires des carrés, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_k$.

Écrire S_n en fonction de n et en déduire la limite de (S_n).

3. Trouver la plus petite valeur de n telle que $S_n \geq 0{,}333333$.
4. Écrire l'algorithme (ou le programme python) permettant de trouver la valeur précédente.