

Exercice 1 : 1. Pour tout entier naturel n , et en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
 $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = n+1 - n = 1$.

2. On considère la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

a) D'après la question 1, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$;

de plus, pour tout entier naturel n , $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ (croissance de la fonction racine carrée), et $u_n > 0$;

donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ (passage à l'inverse, inverse l'ordre), donc $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$, donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$; par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, par la croissance de la fonction racine carrée,

$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1}$; donc $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$; on passe à l'inverse :

$\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, donc $u_{n+1} < u_n$, et la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. La suite (u_n) étant décroissante, le premier terme $u_0 = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$ est un majorant ;
 par la question 2, 0 est un minorant. La suite est bornée par 0 et 1.

5. Pour trouver la plus petite valeur de n telle que
 $u_n < 10^{-5}$, on peut utiliser l'algorithme suivant :
 Et on trouve $n = 2499998352$.

```
u = 1
n = 0
while (u ≥ 0,00001) :
    n = n + 1
    u = sqrt(n+1) - sqrt(n)
print("le plus petit entier n tel que u_n < 0,00001 :", n)
```

Exercice 2 :

Lors de l'oral d'un concours, l'examineur propose
 aux candidats deux sujets choisis dans une banque de 80 sujets.

1. Le choix des deux sujets n'est pas ordonnés, donc le nombre de choix possibles de deux sujets est le nombre de
 combinaisons de deux éléments dans un ensemble à 80 éléments, soit $\binom{80}{2} = \frac{80!}{78!2!} = \frac{80 \times 79}{2} = 3160$.

2. On utilise l'événement contraire : Jacques tire deux sujets parmi ceux qu'il n'a pas préparé ; le nombre est
 $\binom{70}{2} = \frac{70!}{68!2!} = \frac{70 \times 69}{2} = 2415$. Donc le nombre de tirages possibles comportant au moins un
 des sujets qu'il a révisés est $3160 - 2415 = 745$.

3. Combien de sujets devrait-il préparer pour que plus de neuf tirages sur dix contiennent l'un des sujets révisés ?

Plus de neuf tirages sur dix correspond à $\frac{3160 \times 9}{10} = 2844$.

En utilisant la question précédente, le nombre de sujets qu'il devrait préparer pour que plus de neuf tirages sur
 dix contiennent l'un au moins des sujets révisés, est $3160 - \binom{80-n}{2} \geq 2844$, soit $\binom{80-n}{2} \leq 3160 - 2844$;

or $\binom{80-n}{2} = \frac{(80-n)!}{(78-n)!2!} = \frac{(80-n)(79-n)}{2}$; d'où l'inéquation devient $\frac{(80-n)(79-n)}{2} \leq 316$

soit $(80-n)(79-n) \leq 632$ soit $n^2 - 159n + 6320 \leq 632$ soit $n^2 - 159n + 5688 \leq 0$.

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-159)^2 - 4 \times 1 \times 5688 = 2529 > 0$,

donc l'équation $n^2 - 159n + 5688 = 0$ a deux solutions : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{159 + \sqrt{2529}}{2} = 104,64$

et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{159 - \sqrt{2529}}{2} = 54,35$. Comme $a = 1 > 0$, le signe de $n^2 - 159n + 5688$ est :

D'où le nombre de sujets qu'il devrait

préparer pour que plus de neuf tirages sur dix
 contiennent l'un des sujets révisés est 55.

n	$-\infty$	54,34	104,64	$+\infty$
$n^2 - 159n + 5688$	+	0	0	+

Exercice 3 : On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

On note les événements suivants :

H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement ».

V : « Les trois jetons sont alignés verticalement ».

D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale ».

N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Il s'agit de trois jetons sur une grille comportant neuf cases, et les jetons sont ordonnés ;
donc ce sont des 3-uplets à éléments distincts ;

le nombre de placements des trois jetons sur la grille est $9 \times 8 \times 7 = 504$.

2. Pour obtenir un alignement horizontal, le premier jeton a toutes les possibilités, le deuxième n'a plus que deux possibilités correspondant aux deux cases de la même ligne horizontale restantes, et le troisième n'a plus qu'une possibilité ; soit $9 \times 2 \times 1 = 18$.

La probabilité de H est $\frac{18}{504} = \frac{1}{28}$.

Pour obtenir un alignement vertical, le premier jeton a toutes les possibilités, le deuxième n'a plus que deux possibilités correspondant aux deux cases de la même ligne verticale restantes, et le troisième n'a plus qu'une possibilité ; soit $9 \times 2 \times 1 = 18$.

La probabilité de V est $\frac{18}{504} = \frac{1}{28}$.

Pour obtenir un alignement en diagonale, on sépare deux cas :

si le premier jeton est sur la case centrale, le deuxième jeton a encore quatre possibilités et le troisième une seule ; soit $1 \times 4 \times 1 = 4$;

si le premier jeton est sur une autre case des diagonales, le deuxième jeton n'a plus que deux possibilités et le troisième n'a plus qu'une possibilité ; soit $4 \times 2 \times 1 = 8$.

Le nombre de cas est donc $4 + 8 = 12$.

La probabilité de D est $\frac{12}{504} = \frac{1}{42}$.

3. La probabilité de N est égale $1 - (p(H) + p(V) + p(D)) = 1 - \left(\frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{42} \right) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$.