Extrait du bac blanc

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{5}{4} u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n$.

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A : On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-contre une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et u_1.
1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-contre.
On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 7.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

Partie B : On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :
$v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n$ et $w_n = u_n - 7$.
1. a. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n + \dfrac{21}{4}$.
2. a. En utilisant le résultat de la question 1.b., montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.
c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 :

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 + x - 3$.
1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} e^{-x}$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x} \times \dfrac{1}{x^2+1}$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
En donner une interprétation graphique si possible.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = -\dfrac{x^2 e^{-x} g(x)}{(x^2+1)^2}$ où g est la fonction définie dans la partie A.
4. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
« La tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 passe par l'origine du repère ».

Exercice 3 :

Partie A : On prélève un échantillon de 20 personnes dans une ville, dont cinq parmi elles sont vaccinées contre la grippe. On choisit au hasard trois personnes simultanément de cet échantillon. On assimile cette expérience à un tirage de trois boules dans une urne contenant 20 boules numérotées V1, V2, ..., V5 pour les 5 personnes vaccinées et N1, N2, ..., N15 pour les autres.

1. Calculer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer le nombre de tirages comportant deux personnes vaccinées.

Partie B : Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans une ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. Dans cette question, on suppose que $n = 100$.

Déterminer le plus petit entier naturel k tel que la probabilité qu'au plus k personnes soient vaccinées soit supérieure à 0,95.

Exercice au choix entre A et B :

Exercice A : Pour chacune des 5 questions suivantes, une seule réponse est exacte.

Préciser le choix effectué sur la copie, en justifiant votre réponse.

1. On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) =$

A : $\dfrac{\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$ B : $2 + \ln(x)$ C : $\dfrac{2+\ln(x)}{(1+\ln(x))^2}$ D : $\dfrac{1+\ln(x)-x}{(1+\ln(x))^2}$

2. La fonction ln est :

A : convexe sur $]0; +\infty[$ B : concave sur $]0; +\infty[$ C : convexe sur $]0; 1]$ puis concave sur $[1; +\infty[$

D : concave sur $]0; 1]$ puis convexe sur $[1; +\infty[$

3. Voici un programme écrit avec le langage Python. La fonction log désigne la fonction logarithme népérien. La valeur affichée en fin de programme est 0,56.

```
from math import *
X = 1
Y = 1
while Y > 0:
    X = X - 0.01
    Y = log(X) + x
print(X)
```

Une interprétation de ce résultat est :

A : 0,56 est la valeur approchée à 0,01 près de l'image de 1 par la fonction définie sur $]0; +\infty]$ par $f(x) = \ln(x) + x$.

B : 0,56 est le coefficient directeur, arrondi à 0,01 près, de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.

C : 0,56 est la plus grande solution de l'inéquation $\ln(x) + x < 0$ dans $]0; +\infty]$.

D : 0,56 est la valeur approchée à 0,01 près par défaut de l'unique solution de l'équation $\ln(x) = -x$ dans $]0; +\infty]$.

4. Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{2x} + 1) =$

A : $2x$ B : $x + \ln(e^x + e^{-x})$ C : $\ln(e^x - 1) + \ln(e^x + 1)$ D : $2\ln(e^x + 1)$.

5. On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est :

A : $y = \dfrac{2}{3}x - \ln 3$ B : $y = 3x + \ln 3$ C : $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{3}$ D : $y = (-\ln 3)x + \dfrac{2}{3}$.

Exercice B : Pour chacune des 5 questions suivantes, une seule réponse est exacte.
Préciser le choix effectué sur la copie, en justifiant votre réponse.

1. Au poker, on joue avec un jeu de 52 cartes. Chaque joueur reçoit une « main » de 5 cartes.
Le nombre de mains contenant un carré (4 cartes identiques comme 4 rois, ou 4 As) est :
A : 13 B : 52 C : 624 D : 676

2. La fonction exponentielle est :
A : convexe sur $]-\infty; +\infty[$ B : concave sur $]-\infty; +\infty[$
C : convexe sur $]-\infty; 0[$ puis concave sur $]0 ; +\infty[$ D : concave sur $]-\infty; 0]$ puis convexe sur $[0; +\infty[$.

3. On considère la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = (10x - 5)e^{-x}$.
On admet que l'appel de la fonction d() renvoie la valeur 3,3.

```python
def f(x):
    return (10*x-5)*exp(-x)

def d():
    a = 3
    b = 4
    while (b-a) > 0.01:
        y = f((a+b)/2)
        if y > 1:
            a = (a+b)/2
        else:
            b = (a+b)/2
    return a
```

A : 3,3 est la valeur approchée à 0,01 près de l'image de 1 par la fonction f.
B : 3,3 est la moyenne des deux antécédents de 1 par la fonction f.
C : 3,3 est une valeur approchée à 0,01 près par défaut de l'unique solution dans $[0; 6]$ de l'équation $f(x) = 1$.
D : 3,3 est une valeur approchée à 0,01 près de l'antécédent de 1 par f situé dans $[3; 4]$.

4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(0 ; 1 ; – 1) et B(– 2 ; 2 ; – 1) et la droite (d) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=-1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Les droites (AB) et (d) sont :
A : confondues B : strictement parallèles C : sécantes D : non coplanaires.

5. Dans une base de l'espace, on considère les trois vecteurs $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(4; 5; 6)$ et $\vec{w}(7; 8; x)$.
La valeur de x pour laquelle les vecteurs sont coplanaires est :
A : $x = 0$ B : $x = 9$ C : $x = 13$ D : $x = 15$