NOM : ....PRÉNOM : ....

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 TERMINALE spécialité *Jeudi 1er octobre 2020*

EXERCICE 1 (6 points)

Calculer les limites des suites (u_n) suivantes en justifiant la réponse :

a) $u_n = 0{,}5n^2 - 6n - 2$.

b) $u_n = \dfrac{3n^2+\cos(n)}{n^2+3}$.

c) $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{n+4}$.

d) $u_n = \dfrac{1+0{,}5^n}{1{,}5^n+5}$.

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+4}{3}$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 4$.
3. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
5. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 , u_2 et u_3 .

2. L'algorithme ci-contre permet de calculer u_n pour une valeur de n.

Compléter cet algorithme pour calculer u_{10} .

```
U = ...

for k in range( ... ) :

    U = .....

print( ... )
```

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 3n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique en précisant sa raison et son premier terme.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

5. On définit pour tout entier naturel n, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots\ v_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

b) En déduire la limite de (S_n).

Question hors barème : Donner la valeur exacte de u_{100} .