

EXERCICE 1 : Calcul des limites des suites (u_n) suivantes en justifiant la réponse :

a) $u_n = 0,5n^2 - 6n - 2 = n(0,5n - 6) - 2$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5n - 6) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$; donc, par somme et produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $u_n = \frac{3n^2 + \cos(n)}{n^2 + 3}$; pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc $\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 3} \leq \frac{3n^2 + \cos(n)}{n^2 + 3} \leq \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 3}$.

On a $\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 3} = \frac{n^2(3 - \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{3}{n^2})} = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}}$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{n^2}) = 3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{3}{n^2}) = 1$ et par quotient de limites :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 3} = 3$; de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 3} = 3$; et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

c) $u_n = \frac{2\sqrt{n} + 1}{n + 4} = \frac{\sqrt{n}(2 + \frac{1}{\sqrt{n}})}{n(1 + \frac{4}{n})} = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}(1 + \frac{4}{n})}$; on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 2$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{n} = 1$,

donc par produit et quotient de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

d) $u_n = \frac{1 + 0,5^n}{1,5^n + 5}$; $0,5^n$ est le terme d'une suite géométrique de raison $0,5$, strictement comprise entre -1 et 1 , donc cette suite converge vers 0 ; $1,5^n$ est le terme d'une suite géométrique de raison $1,5$, strictement supérieure à 1 , donc cette suite diverge vers $+\infty$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 0,5^n) = 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1,5^n + 5) = +\infty$, et par quotient de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{3}$.

1. Calcul des valeurs exactes de u_1 , u_2 : $u_1 = \frac{2u_0 + 4}{3} = \frac{2 \times 1 + 4}{3} = 2$; et $u_2 = \frac{2u_1 + 4}{3} = \frac{2 \times 2 + 4}{3} = \frac{8}{3}$.

2. On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 4$:

Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \leq u_0 \leq 4$, donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n , et on montre que P_{n+1} est vraie :

$1 \leq u_n \leq 4$ implique $2 \leq 2u_n \leq 8$ implique $6 \leq 2u_n + 4 \leq 12$; implique $2 \leq \frac{2u_n + 4}{3} \leq 4$;

donc $1 < 2 \leq u_{n+1} \leq 4$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 4$.

3. On démontre par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante :

Initialisation : $u_1 = 2$ et $u_0 = 1$, donc $u_0 \leq u_1$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n , et on montre que P_{n+1} est vraie :

$u_n \leq u_{n+1}$ implique $2u_n \leq 2u_{n+1}$ implique $2u_n + 4 \leq 2u_{n+1} + 4$ implique $\frac{2u_n + 4}{3} \leq \frac{2u_{n+1} + 4}{3}$,

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et P_{n+1} est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, donc elle est convergente vers une limite l .

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$, donc l vérifie l'équation $l = \frac{2l + 4}{3}$ équivaut à $3l = 2l + 4$ équivaut à $l = 4$.

Donc la limite de la suite (u_n) est 4.

EXERCICE 3 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Les valeurs exactes de u_1 , u_2 et u_3 :

$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 2 = 2 ; u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 + 2 = 6 ; u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 2 = 6 + 4 + 2 = 12.$$

2. L'algorithme ci-contre permet de calculer u_n pour une valeur de n .

L'algorithme complété pour calculer u_{10} :

3. a) On démontre par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n \geq 3n$:

Initialisation : $u_2 = 6$ et $6 \geq 3 \times 2$, donc la propriété est vraie au rang 2.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel $n \geq 2$, et on montre que P_{n+1}

est vraie :

$$u_n \geq 3n, \text{ donc } u_n + 2n + 2 \geq 3n + 2n + 2 = 5n + 2 ;$$

$$\text{montrons que tout entier naturel } n \geq 2, 5n + 2 \geq 3(n + 1) : 5n + 2 \geq 3(n + 1) \Leftrightarrow 5n + 2 \geq 3n + 3 \Leftrightarrow$$

$$2n \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 0,5 \text{ qui est vrai pour tout entier naturel } n \geq 2. \text{ Donc } u_{n+1} \geq 3(n + 1) \text{ et } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geq 2$, $u_n \geq 3n$.

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$, par les théorèmes de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) On a $v_n = u_{n+1} - u_n = 2n + 2$ qui est le terme général d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 2.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

5. On définit pour tout entier naturel n , la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}$.

a) S_n est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique,

$$\text{donc } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = (n-1) \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} = (n-1) \frac{2 + 2(n-1)}{2} = (n-1) \frac{2n-2+2}{2} = (n-1) \frac{2n}{2} = (n-1)n = n(n-1).$$

Autre méthode : par récurrence : La propriété (P_n) est : $S_n = n(n-1)$.

Initialisation : $S_0 = \sum_{k=0}^{-1} v_k = 0$ et $0(0-1) = 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n , et on montre que P_{n+1} est vraie :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = S_n + v_n = n(n-1) + 2n = n(n-1+2) = n(n+1)$$

$$n^2 + 2n = n^2 + 2n + 0 = n^2 + 2n + 0 ; \text{ et } (n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 = n^2 + 2n + n + 2 = n^2 + 2n + 0 + n + 2 ; \text{ donc}$$

$$S_{n+1} = (n+1)(n+2) \text{ et } P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $S_n = n(n-1)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Question hors barème : La valeur exacte de $u_{100} = 10100$ obtenue avec la calculatrice (Table de la suite) ou avec l'algorithme précédent en remplaçant 10 par 100.

```
U = 0
for k in range(10) :
    U = U + 2*k + 2
print(U)
```

+ 1