CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 TERMINALE spécialité A

EXERCICE 1 : Les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

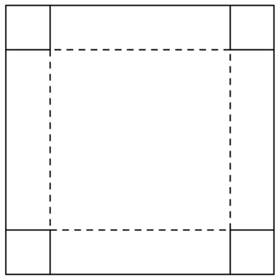
a) $f(x) = \dfrac{e^x - x}{x^2}$: $f'(x) = \dfrac{(e^x-1)x^2-(e^x-x)2x}{x^4} = \dfrac{x^2e^x-x^2-2xe^x+2x^2}{x^4} = \dfrac{e^x(x^2-2x)+x^2}{x^4} = \dfrac{e^x(x-2)+x}{x^3}$.

b) $f(x) = e^{2x^2-5x+1}$: $f'(x) = (4x-5)\,e^{2x^2-5x+1}$.

EXERCICE 2 : Les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

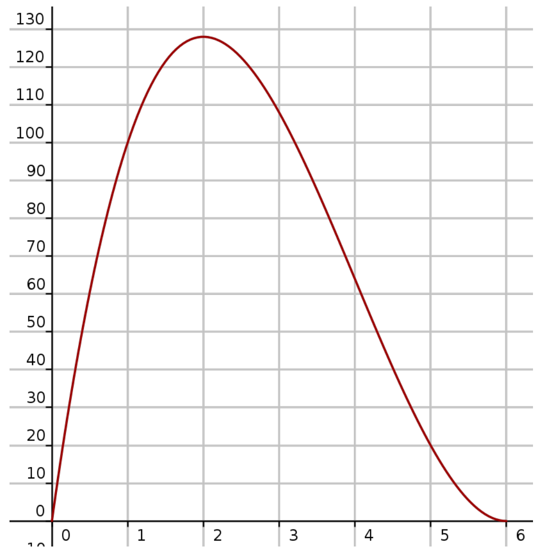


EXERCICE 3 : On considère un carré ABCD tel que AB = 12 cm.
On découpe à chaque coin du carré, quatre carrés de côté x comme sur la figure ci-contre et en pliant suivant les pointillés, on réalise une boîte ouverte de forme parallélépipédique.

1. Le côté du carré formant le fond de la boîte est égal à $12 - 2x$ et la hauteur de la boîte est x. Donc le volume de la boîte est égal à
$V(x)$ = aire de la base × hauteur $= (12-2x)^2\,x = (144-48x+4x^2)x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

2. Le côté du fond de la boîte peut être au plus égal à la moitié du côté du carré, soit 6 ; donc les valeurs possibles pour x sont dans l'intervalle $[0 ; 6]$.
Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction V est l'intervalle $[0 ; 6]$.

3. La dérivée de cette fonction est $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$.
Le signe de cette dérivée : On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-96)^2 - 4\times12\times144 = 2304 = 48^2 > 0$,
donc l'équation $V'(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{96+48}{2\times12} = 6$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{96-48}{2\times12} = 2$.
Donc $V'(x)$ est positif sur $]-\infty ; 2[\cup]6 ; +\infty[$ et négatif sur $[2 ; 6]$.
Donc la fonction V est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 6]$.
De plus, $V(2) = 128$.
Le tableau de variations sur son ensemble de définition :



x	0		2		6
$V'(x)$		+	0	−	0
$V(x)$	0	↗	128	↘	0

4. Le volume maximal de la boîte est égal à 128 cm³ atteint en $x = 2$.

EXERCICE 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+4)e^{-x}$.

1. Limite en $+\infty$: $f(x) = (2x+4)e^{-x} = 2xe^{-x} + 4e^{-x} = \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{4}{e^x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, donc en passant à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$; on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc en passant à l'inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$; par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Limite en $-\infty$: On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x+4) = -\infty$, donc par produit de limites, , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

3. La fonction f est de la forme uv de dérivée $u'v + uv'$, donc
$f'(x) = 2e^{-x} + (2x + 4)(-1)e^{-x} = e^{-x}(2 - 2x - 4) = e^{-x}(-2x - 2)$ qui est du signe de $-2x - 2$ puisque $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. $-2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -1$. D'où le tableau de variations de f :
$f(-1) = (2(-1) + 4)e^{-(-1)} = 2e$.

4. Le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	0

5. a) La fonction f est continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ 1[$ dans $]-\infty\ ;\ 2e[$, et $1 \in\ ]-\infty\ ;\ 2e[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
La fonction f est continue et strictement croissante de $]-1\ ;\ +\infty[$ dans $]0\ ;\ 2e[$, et $1 \in\ ]0\ ;\ 2e[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
b) A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 2{,}11$ et $\beta \simeq -1{,}93$ à 10^{-2} près.