CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 TERMINALE spécialité B

EXERCICE 1 : Les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

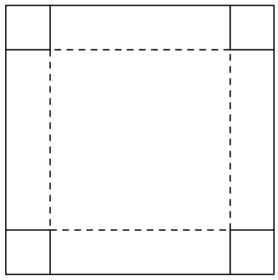
a) $f(x) = \dfrac{e^x - x^2}{x}$; $f\,'(x) = \dfrac{(e^x - 2x)x - 1(e^x - x^2)}{x^2} = \dfrac{xe^x - 2x^2 - e^x + x^2}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1) - x^2}{x^2}$.

b) $f(x) = e^{3x^2 - 8x + 5}$; $f\,'(x) = (6x - 8)\, e^{3x^2-8x+5}$.

EXERCICE 2 : Les limites suivantes :

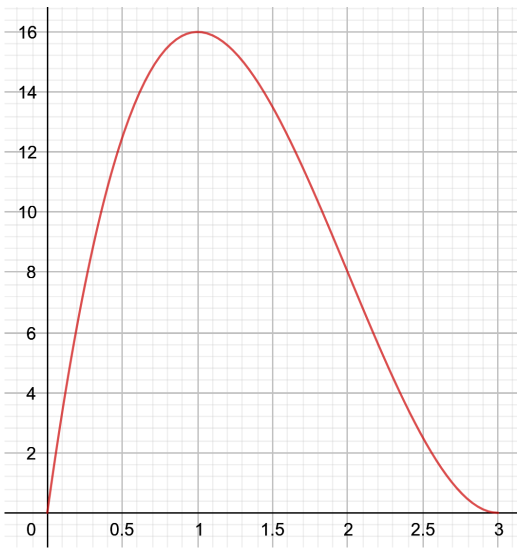
a) On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x(2 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2-0}{1+0} = 2$.



EXERCICE 3 : On considère un carré ABCD tel que AB = 6 cm.
On découpe à chaque coin du carré, quatre carrés de côté x comme sur la figure ci-contre et en pliant suivant les pointillés, on réalise une boîte ouverte de forme parallélépipédique.
1. Le côté du carré formant le fond de la boîte est égal à $6 - 2x$ et la hauteur de la boîte est x. Donc le volume de la boîte est égal à
$V(x)$ = aire de la base $\times$hauteur $= (6 - 2x)^2\, x = (36 - 24x + 4x^2)x = 4x^3 - 24x^2 + 36x$.
2. Le côté du fond de la boîte peut être au plus égal à la moitié du côté du carré, soit 3 ; donc les valeurs possibles pour x sont dans l'intervalle [0 ; 3].
Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction V est l'intervalle [0 ; 3].
3. La dérivée de cette fonction est $V'(x) = 12x^2 - 48x + 36$.
Le signe de cette dérivée : On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-48)^2 - 4\times12\times36 = 576 = 24^2 > 0$, donc l'équation $V'(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{48+24}{2\times12} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{48-24}{2\times12} = 1$.
Donc $V'(x)$ est positif sur $]-\infty\ ;\ 1[\ \cup\ ]3\ ;\ +\infty[$ et négatif sur [1 ; 3].
Donc la fonction V est croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; 3].
De plus, $V(1) = 16$.
Le tableau de variations sur son ensemble de définition :

x	0		1		3
$V'(x)$		+	0	−	0
$V(x)$	0	↗	16	↘	0



4. Le volume maximal de la boîte est égal à 16 cm^3 atteint en $x = 1$.

EXERCICE 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4 - 2x)e^x$.

1. Limite en $+\infty$: On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (4 - 2x) = -\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Limite en $-\infty$: $f(x) = (4 - 2x)e^x = 4e^x - 2xe^x$; on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, par somme de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.
3. La fonction f est de la forme uv de dérivée $u'v + uv'$, donc
$f'(x) = -2e^x + (4 - 2x)e^x = e^x(-2 + 4 - 2x) = e^x(2 - 2x)$ qui est du signe de $2 - 2x$ puisque $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.
$2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 1$. D'où le tableau de variations de f :
$f(1) = (4 - 21)e^1 = 2e$.
4. Le tableau de variation complet de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$2e$	↘	$-\infty$

5. a) La fonction f est continue et strictement croissante de $]-\infty\ ;\ 1[$ dans $]0\ ;\ 2e[$, et $1 \in]0\ ;\ 2e[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
La fonction f est continue et strictement croissante de $]1\ ;\ +\infty[$ dans $]-\infty\ ;\ 2e[$, et $1 \in]-\infty\ ;\ 2e[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
b) A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 1{,}93$ et $\beta \simeq -2{,}11$ à 10^{-2} près.