

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Étudier les variations de la fonction f .
4. Montrer que la fonction f est convexe sur \mathbb{R} .

EXERCICE 2 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et la limite en 0.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$.

3. a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f , c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0; +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe C admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3 (3 points)

On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0,1$ est défectueuse.

Le défaut sur une pièce intervient de manière indépendante des autres pièces.

On contrôle un lot de 20 pièces ; Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces défectueuses parmi les 20».

1. Quelle est la loi de X ? Justifier la réponse.
2. Calculer la probabilité pour qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse.
3. Calculer la probabilité pour que X soit comprise entre 8 et 12.
4. Déterminer l'espérance mathématique de X .

EXERCICE 4 (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre et les points M et N milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[DH]$.

On se place dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points E, H, M et N.
2. On admet que les droites (EH) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.
 - a) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN) et de la droite (EH).
 - b) Déterminer les coordonnées du point K.
3. Construire la section du cube par le plan (MNF).

