CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 4 TERMINALE spécialité

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$.

1. Pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}\right) = \ln(e^{-x} + 1) = \ln(1 + e^{-x})$.

2. Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{-x}+1) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(1) = 0$;

Limite en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x)$ est de la forme $\ln(u)$ de dérivée $\frac{u'}{u}$; d'où $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} < 0$ puisque pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Pour démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$, on montre que pour tout réel x, la dérivée seconde $f''(x) > 0$:
$f'(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ de dérivée $\frac{u'v-uv'}{u^2}$;
d'où $f''(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x}+1)-(-e^{-x})(-e^{-x})}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{-2x}+e^{-x}-e^{-2x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} > 0$ puisque pour tout réel x, $e^{-x} > 0$.
Donc la fonction f est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$.

On note C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Limite en $+\infty$: on factorise par x : $f(x) = x\left(1 + \frac{4}{x} - 4\frac{\ln(x)}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$;

on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{4}{x}-4\frac{\ln(x)}{x}-\frac{3}{x^2}\right) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 0 : on factorise par $\ln(x)$: $f(x) = x + 4 + \ln(x)\left(-4 - \frac{3}{x\ln(x)}\right)$; on sait que $\lim\limits_{x\to0+} x\ln(x) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to0+} \frac{-3}{x\ln(x)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0+} \left(-4-\frac{3}{x\ln(x)}\right) = +\infty$; de plus, $\lim\limits_{x\to0+} \ln(x) = -\infty$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = -\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Pour tout nombre réel $x > 0$, on a $f'(x) = 1 - 4\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2-4x+3}{x^2}$.

3. a) Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 - 4x + 3$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times1\times3 = 4 = 2^2 > 0$, donc l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1$.
Comme $a = 1 > 0$, $f'(x)$ est positif sur $]0 ; 1[\cup]3 ; +\infty[$ et négatif sur $[1 ; 3]$.
Donc la fonction f est croissante sur $]0 ; 1]$, décroissante sur $[1 ; 3]$ et croissante sur $]3 ; +\infty[$.
D'où le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6 - 4\ln(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \frac{3}{1} = 2$;

$f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \frac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \simeq 1{,}605$;

b) On a $\frac{5}{3} \simeq 1{,}666 \in]-\infty ; 2[$, $\frac{5}{3} \in]6 - 4\ln(3) ; 2[$,

et $\frac{5}{3} \in]6 - 4\ln(3) ; +\infty[$, on obtient une solution dans $]0 ; 1[$, une solution dans $]1 ; 3[$,

une solution dans $]3 ; +\infty[$. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$ est 3.

4. Pour étudier la convexité de la fonction f, on étudie le signe de la dérivée seconde $f''(x)$:

$f'(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ de dérivée $\frac{u'v-uv'}{u^2}$;

d'où $f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2)-(x^2-4x+3)(2x)}{x^4} = \frac{2x^3-4x^2-2x^3+8x^2-6x}{x^4} = \frac{4x^2-6x}{x^4} = \frac{4x-6}{x^3}$ qui eset du signe de $4x-6$ puisque $x^3 > 0$ sur $]0; +\infty[$; $4x-6 = 0$ pour $x = 1{,}5$ et $4x-6 > 0$ pour $x > 1{,}5$; $4x-6 < 0$ pour $x < 1{,}5$; donc la fonction f est concave sur $]0 ; 1{,}5]$ et convexe sur $]1{,}5; +\infty[$; la courbe C admet un unique point d'inflexion, de coordonnées $(1{,}5 ; f(1{,}5)) = (1{,}5 ; 3{,}5 - 4\ln(1{,}5))$.

<u>EXERCICE 3 :</u> On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0{,}1$ est défectueuse. Le défaut sur une pièce intervient de manière indépendante des autres pièces.
On contrôle un lot de 20 pièces ; Soit X la variable aléatoire : «nombre de pièces défectueuses parmi les 20».

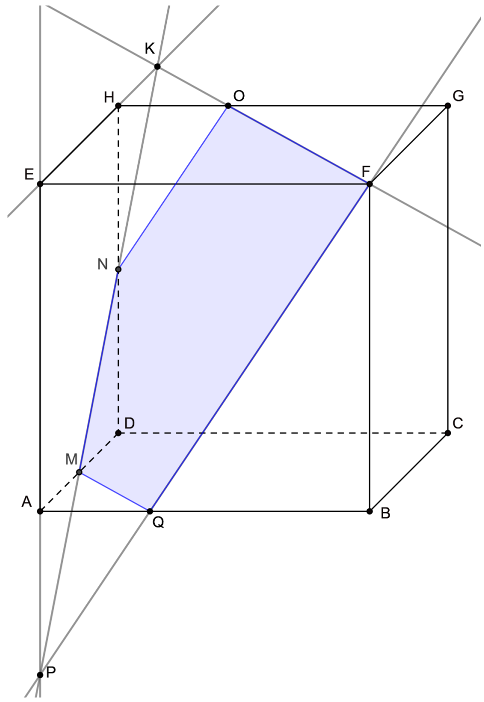
1. X est le nombre de succès dans la répétition de 20 épreuves de Bernoulli : le contrôle d'une pièce dans le lot de 20 pièces ; le succès étant que la pièce soit défectueuse ; cette répétition est faite de manière identique et indépendante, donc X sui la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$.

2. La probabilité pour qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse est $p(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^{20} \simeq 0{,}121577$.

3. La probabilité pour que X soit comprise entre 8 et 12 est
$p(8 \leq X \leq 12) = p(X \leq 12) - p(X \leq 7) \simeq 0{,}999999996 - 0{,}999584365 = 0{,}000415$.

4. L'espérance mathématique de X est $E(X) = np = 20 \times 0{,}1 = 2$.

<u>EXERCICE 4 :</u> On considère le cube ABCDEFGH ci-contre et les points M et N milieux respectifs des segments [AD] et [DH]. On se place dans le repère$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Les coordonnées des points E(0 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), M(0 ; 0,5 ; 0) et N(0 ; 1 ; 0,5).

2. On admet que les droites (EH) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.

a) Un vecteur directeur de (EH) est $\overrightarrow{EH}$ (0 ; 1 ; 0) ;

une représentation paramétrique de la droite (EH) : $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Un vecteur directeur de (MN) est $\overrightarrow{MN}$ (0 ; 0,5 ; 0,5) ; une représentation paramétrique de la droite (MN) : $\begin{cases} x=0 \\ y=0{,}5+0{,}5t \\ z=0{,}5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{MN}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (EH) et (MN) ne sont pas parallèles.
On cherche les coordonnées du point d'intersection :

$\begin{cases} 0=0 \\ t=0{,}5+0{,}5t' \\ 1=0{,}5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ t=0{,}5+0{,}5\times 2 \\ t'=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ t=1{,}5 \\ t'=2 \end{cases}$;

Dans la représentation paramétrique de (EH) avec $t = 1{,}5$, on obtient les coordonnées du point K(0 ; 1,5 ; 1).

3. Construction de la section du cube par le plan (MNF) ci-dessus : la droite(FK) coupe [GH] en O ;
la droite (MN) coupe (AE) en P ; la droite (PF) coupe (AB) en Q ; la section est le pentagone MNOFQ.