Baccalauréat S mai 2004

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **3 points**
Commun à tous les candidats

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A, I le milieu du segment [AB] et J le centre degravité de ABC.

Pour tout réel m, différent de $-\frac{1}{3}$, on note G_m le barycentre du système de points pondérés

$$S_m = \{(\mathrm{A},\, 1),\, (\mathrm{B},\, m),\, (\mathrm{C},\, 2m)\}\,.$$

Pour tout point M du plan on note $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\mathrm{A}} - \overrightarrow{M\mathrm{B}} - 2\overrightarrow{M\mathrm{C}}$.
Pour chacune des six affirmations suivantes, dite si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Chaque bonne réponse donne 0,5 *point, chaque réponse fausse ou illisible enlève* 0,25 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Un éventuel total négatif serait ramené à* 0.
Répondre aux affirmations sur la page annexe.

Affirmation	**V ou F**
G_1 est le milieu du segment [CI].	
G_1 est barycentre de $\left\{(J,\, 2),\, \left(C,\, \frac{2}{3}\right)\right\}$	
Pour tout point M , $\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.	
Pour tout m, distinct de $-\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}G_m}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AG}_{-1}}$.	
$\mathrm{IBG}_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle.	
Pour tout point P de (AG_{-1}), il existe un réel m tel que $P = G_m$.	

Exercice 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\, \overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v})$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$.

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient à (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $2,\ -3 - \mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-3 + \mathrm{i}\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A′, B′ et C′, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H′) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).

- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- En utilisant la question **2. a.** prouver que : M' appartient a (H′) si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A′, B′, C′, la courbe (H′), puis la courbe (H).

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 1 - 2\mathrm{i},\ z_{\mathrm{A'}} = -2 + 4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = 3 - \mathrm{i},\ z_{\mathrm{B'}} = 5\mathrm{i}.$$

1. a. Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Monter que ABB′A′ est un rectangle.

b. Soit s la réflexion telle que s(A)=A′ et s(B)=B′. On note (Δ) son axe. Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z. Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 2\mathrm{i} - 1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}.$$

a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

b. Soit Ω le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.

Montrer que C et D sont les images respectives de A′ et B′ par h.

c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1} \circ g$.

a. Déterminer l'expression complexe de f.

b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.

Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*

Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.

Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.

Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.

Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\mathrm{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois? exactement 5 fois?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2. b**?

Exercice 4 **8 points**

Commun à tous les candidats

Partie I

On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle:

$$(\mathrm{E}_n) \qquad y' + y = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On fait l'hypothèse que deux fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, vérifient, pour tout x réel:

$$g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout x réel,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

b. En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n), sachant que $h(0) = 0$.

Quelle est alors la fonction g?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation:

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b. Résoudre (F).

c. Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n).

d. Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie II

Le but de cette partie est de montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} \quad \text{(on rappelle que par convention} \quad 0! = 1).$$

1. On pose, pour tout x réel,

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

a. Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = f_0$.

b. Pour tout entier strictement positif n, on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la **Partie I**, montrer par récurrence que, pour tout x réel et tout entier $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x. \quad \text{(on ne cherchera pas à calculer } I_n\text{)}$$

a. Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout x élément de l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'encadrement :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}.$$

En déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer la limite de la suite (I_n).

b. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $I_k - I_{k-1} = -\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

d. En déduire finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

1. (a) $z_A = 1 - 2i$, $z_B = 3 - i$, donc $z_B - z_A = 2 + i$. De même , $z_{B'} - z_{A'} = 2 + i$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont donc même affixe $Z = 2 + i$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.
   $ABB'A'$ est donc un parallèlogramme.
   De plus, l'affixe de $\overrightarrow{AA'}$ est $-3 + 6i$.
   On remarque alors que $(-3 + 6i) = 3i \times (2 + i)$.
   Donc, $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AA'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
   Donc, $ABB'A'$ est rectangle direct

   (b) s reflexion d'axe (Δ) telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. Donc (Δ) est la médiatrice de $[AA']$ et $[BB']$, c'est à dire, (Δ) est la droite passant par le milieu de $[AA']$ et orthogonale à (AA').
   $I =$ milieu de $[AA']$. Coordonnées de $I = (-\frac{1}{2}; 1)$.
   $M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AA'} = 0$.
   $\overrightarrow{IM}(x + \frac{1}{2}; y - 1)$, $\overrightarrow{AA'}(-3; 6)$, $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AA'} = -3x + 6y - \frac{15}{2}$.
   D'où
   $$(\Delta) : x - 2y + \frac{5}{2} = 0$$

   (c) L'application du plan dans lui-même dont l'expression complexe est :
   $$z' = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\overline{z} + 2i - 1$$
   est une similitude indirecte S.
   Les points A , B, A' et B' sont distincts 2 à 2.
   s est aussi une similitude indirecte.
   On a donc $s = S$ si et seulement si $s(A) = S(A)$ et $s(B) = S(B)$
   Or, un simple calcul de vérification montre que:
   $$z_{A'} = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\overline{z}_A + 2i - 1 \quad , \quad z_{B'} = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\overline{z}_B + 2i - 1$$
   On a donc $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$ d'où $s = S$ d'où l'expression complexe de s est bien:
   $$z' = (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)\overline{z} + 2i - 1$$

2. (a) Simple calcul ... Affixe de $C = z_C = 7 - 5i$ et Affixe de $D = z_D = 3 - 7i$

   (b) h est l'homothétie de centre $\Omega(1, 1)$ et de rapport $k = -2$.
   L'affixe de Ω est $z_\Omega = 1 + i$. Donc l'expression complexe de h est donnée par:
   $(z' - z_\Omega) = -2(z - z_\Omega)$ ou encore:
   $$z' = -2z + 3 + 3i$$
   On remarque alors (faire le calcul!) que $z_C = -2z - A' + 3 + 3i$ et $z_D = -2z_{B'} + 3 + 3i$
   D'où $h(A') = C$ et $h(B') = D$

   (c) L'application réciproque de h, h^{-1}, est l'homothetie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.
   Expression de z en fonction de z_1: $z = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{3}{2}(1 + i)$

3. $f = h^{-1} \circ g$

   (a) Il n'est pas besoin de faire des calculs dans cette question!
   On remarque que f est la composée d'une similitude directe h^{-1} et d'une similitude indirecte g.
   Donc, f est une similitude indirecte.
   De plus, $f(A) = h^{-1} \circ g(A) = h^{-1}(C) = A'$.
   De même, $f(A') = h^{-1} \circ g(A') = h^{-1}(D) = B'$.
   Il y a unicité de la similitude indirecte transformant A en A' et B en B'.
   Donc, $f = s$ ..... Donc $g = h \circ s$.
   $P = g(M)$. Construction: On construit le symétrique N de M par rapport à (Δ) puis l'image de N par h!

Partie I

1. (a) g solution de (E_n) si et seulement si $\forall x \in I\!R \quad , \quad g'(x) + g(x) = \frac{x^n}{n!}e^x$.
   $g(x) = h(x)e^{-x}$ donc $g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x}$.
   D'où g solution de (E_n) si et seulement si $\forall x \in I\!R \quad , \quad h(x) + h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
   Or, $\forall x \in I\!R$, $e^{-x} \neq 0$, donc g solution de (E_n) si et seulement si pour tout x réel , $h(x) = \frac{x^n}{n!}$

   (b) g solution de (E_n) si et seulement si il existe une constante réelle K telle que pour tout x réel,
   $$h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + K$$
   La condition $h(0) = 0$ implique que $K = 0$. D'où
   $$h(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$$

2. (a) g est solution de (E_n). Donc, φ solution de (E_n) si et seulement si pour tout réel x, $\varphi'(x) + \varphi(x) = g'(x) + g(x)$.
   Ou encore, pour tout réel x, $(\varphi - g)'(x) + (\varphi - g)(x) = 0$
   Ce qui ne signifie rien d'autre que $(\varphi - g)$ est solution de (F).

   (b) Solution de (F) .... Ensemble des fonctions Y telles que $\forall x \in I\!R$, $Y(x) = ke^{-x}$, où k=constante réelle.

   (c) D'où φ solution de (E_n) si et seulement si il existe une constante réelle k telle que
   $$\forall x \in I\!R, \varphi(x) = g(x) + ke^{-x}$$
   D'où, Solution général de (E_n):
   $$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + ke^{-x} \quad k = \text{ constante réelle}$$

   (d) Solution de (E_n) vérifiant $f(0) = 0$
   $$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$$

Partie II

1. $f_0(x) = e^{-x}$, $f_1(x) = xe^{-x}$

   (a) Pas de difficultés ... $f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x} = f_0(x)$.

   (b) Pour propriété est vraie pour $n = 1$. C'est simplement la vérification faite dans la question précédente!
   Hypothèse de Récurrence: f_n est la solution de $y' + y = f_{n-1}$ avec $f_n(0) = 0$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.
   Par définition, f_{n+1} est la solution de $y' + y = f_n$ avec $f_{n+1}(0) = 0$
   Donc, f_{n+1} est solution de $y' + y = \frac{x^n}{(n+1)!}e^{-x}$ avec $f_{n+1}(0) = 0$.
   D'après la **Partie I**, on sait alors que $f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$
   D'où la conclusion par récurrence ...

2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$

   (a) On sait que pour tout $x \in [0;1]$, $-x \leq 0$ donc $0 < e^{-x} \leq 0$
   D'où pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$
   D'où , $0 \leq \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx$, c.a.d , $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n}dx$
   Or, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$ d'où $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ d'où (I_n) converge vers 0.

(b) C'est direct! .... Même pas besoin d'intégration par parties ....
On sait que $f_k' + f_k = f_{k-1}$ ou encore $f_k - f_{k-1} = -f_k'$ (c'est la question 1:)
Donc,

$$\int_0^1 (f_k(x) - f_{k-1}(x))dx = -\int_0^1 f_k'(x)dx$$

Ou encore

$$I_k - I_{k-1} = -\int_0^1 f_k'(x)dx$$

Or,

$$-\int_0^1 f_k'(x)dx = -\left[f_k(x)\right]_0^1 = -f_k(1) \quad \text{car } f_k(0) = 0$$

On sait que $f_k(x) = \frac{x^k}{k!}e^{-x}$ donc $f_k(1) = \frac{1}{k!}e^{-1}$
D'où

$$I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}e^{-1}$$

(c) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$
$I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}e^{-1}$
$I_{n-1} - I_{n-2} = -\frac{1}{(n-1)!}e^{-1}$
......
......
$I_2 - I_1 = -\frac{1}{2!}e^{-1}$
$I_1 - I_0 = -\frac{1}{1!}e^{-1}$
D'où
$I_n - I_0 = -\left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)e^{-1}$
$I_n = I_0 - \left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)e^{-1}$
$I_n = 1 - e^{-1} - \left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)e^{-1}$
Comme $0! = 1$, on peut alors écrire:
$I_n = 1 - \dfrac{1}{0!}e^{-1} - \left(\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)e^{-1} = 1 - \left(\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)e^{-1}$
Ce qui donne bien

$$I_n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!}$$

(d) On sait que (I_n) converge vers 0. Donc:
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!} = 1$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$