EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$.

2) On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.

a) Déduire de **1)** une solution de l'équation (E).

b) L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3) Déduire également de **1)** une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.

4) On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

b) Montrer que b et c sont solutions de (E').

5) a) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

b) Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

c) Déterminer le centre de gravité de cette figure.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne le point $S(1\,;-2\,;0)$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+y-3z+4=0$.

1) Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point S et perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ est :

A : $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=-3 \end{cases}$ **B** : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=1-3t \end{cases}$ **C** : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-2t\,,\ t\in\mathbf{R} \\ z=3t \end{cases}$ **D** : $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+t\ \ ,\ t\in\mathbf{R} \\ z=-3-3t \end{cases}$

2) Les coordonnées du point d'intersection H de la droite $\mathscr{D}$ avec le plan $\mathscr{P}$ sont :

A : $(-4;0;0)$ **B** : $\left(\frac{6}{5};\frac{-9}{5};\frac{-3}{5}\right)$ **C** : $\left(\frac{7}{9};\frac{-2}{3};\frac{1}{3}\right)$ **D** : $\left(\frac{8}{11};\frac{-25}{11};\frac{9}{11}\right)$

3) La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$ **B** : $\frac{3}{\sqrt{11}}$ **C** : $\frac{9}{\sqrt{11}}$ **D** : $\frac{9}{11}$

4) On considère la sphère de centre S et de rayon 3.
L'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$ est égale :

A : au point $I(1\,;-5\,;0)$

B : au cercle de centre H et de rayon $r=3\sqrt{\frac{10}{11}}$

C : au cercle de centre S et de rayon $r=2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r=\frac{3\sqrt{10}}{11}$

<u>Exercice 2</u> *(5 points)*

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent -ils être premiers ?* »

Pour tout entier naturel $p \geq 2$, on pose $N_p = 1...1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + ... + 10^0$.

1) Les nombres $N_2=11$, $N_3=111$, $N_4=1111$ sont-ils premiers ?

2) Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3) On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1)$$

a) On suppose que p est pair et on pose $p=2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_2=11$.

b) On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p=3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_3=111$.

c) On suppose p non premier et on pose $p=kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k.

4) Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?

4MASSG11

EXERCICE 4 (4 points)

Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[) = 0{,}5$.

1) Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

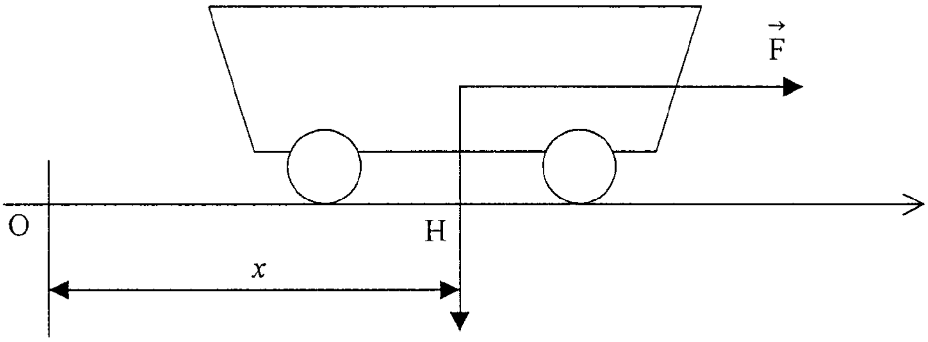
3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$.

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

EXERCICE 5 (4 points)

Commun à tous les candidats



Un chariot de masse 200 kg se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. Il est soumis à une force d'entraînement constante $\vec{F}$ de valeur 50 N. Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire ; le coefficient de proportionnalité a pour valeur absolue 25 $N.m^{-1}.s^{-1}$.
La position du chariot est repérée par la distance x, en mètres, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en secondes. On prendra t dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Les lois de Newton conduisent à l'équation différentielle du mouvement (E) $25x' + 200x'' = 50$, où :

x' est la dérivée de x par rapport au temps t,
x'' est la dérivée seconde de x par rapport au temps t.

1) On note $v(t)$ la vitesse du chariot au temps t ; on rappelle que $v(t) = x'(t)$. Prouver que x est solution de (E) si et seulement si x' est solution de l'équation différentielle (F) $v' = -\frac{1}{8}v + \frac{1}{4}$.
Résoudre l'équation différentielle (F).

2) On suppose que, à l'instant $t = 0$, on a : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

a) Calculer, pour tout nombre réel t positif, $x'(t)$.

b) En déduire que l'on a, pour tout nombre réel t positif, $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-t/8}$.

3) Calculer $V = \lim_{t \to +\infty} v(t)$. Pour quelles valeurs de t la vitesse du chariot est-elle inférieure où égale à 90 % de sa valeur limite V ?

4) Quelle est la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? On exprimera cette distance en mètres, au décimètre près.

Indications Baccalauréat S Juin 2004 National

Exercice 1: Commun à tous les candidats

1) Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} - u_n = 2n+3 > 0$ car $n > 0$.

La suite est donc strictement croissante.

2) a: On pose (P_n) la propriété suivante "$u_n > n^2$ ".

(Po) est vraie car $u_0 = 1$.

On formule l'hypothèse de récuurence (P_n)

On a alors : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 > n^2 + 2n + 3 > (n+1)^2 + 2 > (n+1)^2$.

On a donc : (P_n) => (P_{n+1}) pour tout n entier naturel.

La propriété (P_n) est donc hériditaire. D'où la conclusion par récurrence.

b: On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$. Donc la suite (u_n) tend vers +*oo*.

3) Un simple calcul montre que $u_0 = 1$, $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$.

On peut donc conjecturer que l'expression de u_n en fonction de n est : $u_n = (n+1)^2$.

On peut alors faire une récurrence....

Si $u_n = (n+1)^2$ alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$

$u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$

Et on peut conclure.

Autre méthode, plus directe!

$u_n - u_{n-1} = 2(n-1) + 3$

$u_{n-1} - u_{n-2} = 2(n-2) + 3$

....

$u_3 - u_2 = 2*2 + 3$

$u_2 - u_1 = 2*1 + 3$

$u_1 - u_0 = 2*0 + 3$

Donc, en faisant la somme: $u_n - u_0 = [2(n-1) + 3] + [2(n-2)+3] + ... + [2*0+3]$

$u_n - u_0$ est donc la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Premier terme de cette somme = $[2(n-1)+3]$, dernier terme = $[2*0+3]$

D'où :

$$u_n - u_0 = n \times \frac{[2(n-1)+3]+[2\times 0+3]}{2} = n \times \frac{(2n+4)}{2} = n(n+2)$$

D'où $u_n = n(n+2) + u_0 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Exercice 2 : Pour les candidats non-spécialité:

1) Plusieurs façons de faire cette vérication

Par exemple:

$(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ donc $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$ car $i^2 = -1$ donc $i^3 = -i$.

2) a: Comme $(1 + i)^6 = -8i$, on a : $[(1 + i)^3]^2 = -8i$. Donc une solution de (E) est $Z_1 = (1+i)^3 = -2 + 2i$.

On a alors : $(z^2 + 8i) = (z^2 - Z_1{}^2) = (z - Z_1)(z + Z_1)$.

D'où $(z^2 + 8i) = 0$ si et seulement si $z = Z_1$ ou $z = -Z_1$. D'où l'autre solution $Z_2 = 2 - 2i$.

3) C'est la même idée que pour **2)**. On écrit que $z^6 = (z^2)^3$.

D'où une solution de (E ') : $z_1 = (1 + i)^2 = 2i$

4) a: L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle 2 /3 est :

$$z' = z \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = z \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

A a pour affixe 2i et B = r(A). Donc l'affixe b de B est :

$$b = 2i \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

De même l'affixe c de C = r(B) est:

$$c = b \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-\sqrt{3} - i) \times \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

b: On sait que $a^3 = (2i)^3 = -8i$. Posons $J = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Remarquons que $J^3 = 1$

On a alors $b = aJ$ donc $b^3 = (aJ)^3 = a^3 J^3 = a^3 = -8i$.

De même , $c = bJ = aJ^2$ donc $c^3 = b^3 J^3 = b^3 = -8i$.

D'où b et c sont bien solutions de (E ').

5) a: Faites la figure !!!!

b: ABC est un triangle équilatéral. Et pour le voir, pas de calculs compliqués!

Distance AB = $|b - a| = |aJ - a| =$

Distance BC = $|c - b| = |aJ^2 - aJ| = |J|.|aJ-a| = |aJ-a|$ car $|J| = 1$.

Distance AC = $|c - a| = |aJ^2 - a| = |J|.|aJ^2 -a| = |aJ^3 - aJ| = |a - aJ|$ car $J^3 = 1$.

c: Le centre de gravité de ABC est O. On peut par exemple, puisque l'on est dans les racines de (E '), simplement remarquer que $a + b + c = 0$.

Exercice 2 : Spécialité:

1) Pour $x = 1$, pas de problème!

Pour x différent de 1, il suffit de se rappeler de l'expression de $(1+x + x^2 + ... + x^{k-1})$.

(Voir votre cours sur les suites géométriques!)

2) a: Application directe de la question **1)**.

On pose $x = a^d$. Alors $(a^d -1)(1 + a^d + (a^d)^2 + ... + (a^d)^{k-1}) = (a^d)^k - 1 = a^{dk} - 1 = a^n -1$

D'où $(a^d -1)$ divise $a^n -1$.

b: 2004 est divisible par 3 donc, d'après le résultat précédent, $2^{2004}-1$ est divisible par $2^3-1 = 7$.

2004 est divisble par 6 donc, $2^{2004}-1$ est divisible par $2^6-1 = 63$.

De plus, $63 = 7 * 9$ donc $2^{2004}-1$ est divisible par 9.

3) a: On sait que si d = pgcd(m , n) alors $m = dm'$ et $n = dn'$ avec pgcd(m' , n') = 1.
Donc, d'après le théorème de Bachet-Bezout, il existe u et v entiers relatifs tels que:
$um' - vn' = 1$. D'où il existe u et v entiers relatifs tels que : $udm' - vdn' = d$.
D'où il existe u et v entiers relatifs tels que $um - vn = d$.

b: Simple calcul sur les exposants!
$(a^{mu} - 1) - (a^{nv}-1)a^d = a^{mu}-1 - a^{nv+d} + a^d = a^d - 1$ car $nv+d = m$.
On en déduit donc que: $(a^{mu} - 1) = (a^{nv}-1)a^d + a^d - 1$.
C'est simplement la division euclidienne de $(a^{mu} - 1)$ par $a^{nv} -1$ car $0 \leq a^d - 1 < a^{nv} -1$.
De plus, d divise nv donc $a^d - 1$ divise $a^{nv} -1$ d'après le résultat de la question **2)a:**.
D'après l'algorithme d'Euclide , en en déduit que pgcd($a^{mu} - 1$, $a^{nv} - 1$) = $a^d - 1$.

c: 63 = 1*60 + 3 et 60 = 3*20 donc pgcd(63 , 60) = 3 donc , d'après la question précédente:
pgcd($2^{63} - 1$,$2^{60} - 1$) = $2^3 - 1 = 7$.

Exercice 3: Commun à tous les candidats

1) Réponse D
2) Réponse D
3) Réponse B
4) Réponse B

Exercice 4: Commun à tous les candidats

1) On sait que $p([0;200[) = 0,5$ donc $\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,5$.

Or $\int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[- e^{-\lambda x}\right]_0^{200} = 1 - e^{-200\lambda}$.

D'où λ vérifie l'équation : $0,5 = 1 - e^{-200\lambda}$. d'où

$$\lambda = \frac{\ln 2}{200}$$

2) On veut $p([300 ; +oo[) = 1 - p([0 ; 300[)$

Un simple calcul d'intégrale donne alors :

$$p([300; +\infty[) = 1 - \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{4}\sqrt{2} \approx 0,353$$

3) a: On peut faire une intégration par parties.

$$\int_0^{A} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[- x e^{\lambda x}\right]_0^{A} + \int_0^{A} e^{-\lambda x} dx = \left[- x e^{-\lambda x}\right]_0^{A} - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{A} =- A e^{-\lambda A} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}$$

D'où la réponse ...

b) Si A tend vers +*oo* alors $Ae^{-\lambda A}$ et $e^{-\lambda A}$ tendent vers 0 car $\lambda > 0$ d'où $d_m = 1/\lambda = 289$ semaines

Exercice 5 : Commune à tous les candidats

1) $x' = v$ d'où $25x'' + 200x' = 50$ si et seulement si $25v' + 200v = 50$ d'où la réponse ...

Equation différentielle $y' = ay + b$, voir votre cours !

Solution de (F) : $v(t) = ke^{-t/8} + 2$ *où* k = constante réelle.

On a donc $x'(t) = ke^{-t/8} + 2$ *où* k = constante réelle.

2) a: On sait que $x'(t) = ke^{-t/8} + 2$ *où* k = constante réelle et on a $x'(0) = 0$ d'où k = -2

d'où $x'(t) = -2e^{-t/8} + 2$.

De plus, en intégrant, $x(t) = 16e^{-t/8} + 2t + c$ avec c = constante réelle.

On sait que $x(0) = 0$ d'où $c = -16$. D'où $x(t) = 16e^{-t/8} + 2t - 16$.

3) On sait que $v(t) = x'(t) = -2e^{-t/8} + 2$. Si t tend vers +*oo* alors $(e^{-t/8})$ tend vers 0.

D'où la limite de $v(t)$ en +*oo* est 2.

Valeur limite V = 2 donc 90%V = 1,8. On cherche les valeurs t telles que $v(t) \leq 1,8$.

C'est à dire telles que : $-2e^{-t/8} + 2 \leq 1,8$ d'où $t \leq 8\ln(10)$