Baccalaurat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie mars 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Commun tous les candidats

L'exercice comporte 4 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, le candidat doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire sur la feuille jointe en annexe. Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Chaque réponse exacte rapporte 0,25 point. Une bonification de 0,25 point est ajoutée chaque fois qu'une question est traitée correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 3 affirmations sont exactes). 2 réponses inexactes dans une même question entraînent le retrait de 0,25 point.

L'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.

Si le total des points de l'exercice est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans l'exercice, le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(\text{e}^{\text{i}\theta}\right)^n$ est égal à :	$\text{e}^{\text{i}n\theta}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right) + \text{i}\sin\left(\theta^n\right)$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta) + \text{i}\sin(n\theta)$	☐ Faux ☐ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2\text{i}}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☐ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z = x + \text{i}y$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☐ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a} = \text{i}\sqrt{3}$, alors :	BC = 2 AC	☐ Faux ☐ Vrai
		$\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	☐ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = \text{CA}^2$	☐ Faux ☐ Vrai

EXERCICE 2 **5 points**

Commun tous les candidats

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.
   - **a.** Calculer l'espérance mathématique de X.
   - **b.** Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.
   - **c.** Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
   Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.
4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.
   - **a.** Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.
   - **b.** Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$.
     Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.
   - **c.** En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.
     (On exprimera p en fonction de x_0).

EXERCICE 3 — 6 points

Commun tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1)$

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leqslant x \leqslant 4$, $\quad -5 \leqslant y \leqslant 5$.
   Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   - **a.** Sur les variations de la fonction f ?
   - **b.** Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f
   - **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f
   - **b.** Étudier les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.
   - **c.** Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   - **d.** Les résultats aux questions **3. a.** et **3. c.** confirment-ils les conjectures émises à la question **2.** ?

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1\ ;\ 0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question **3.**.

a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question **3. c.** dans la fenêtre de votre calculatrice ?

b. À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.

5. Soit F la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1).$$

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Calculer $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ et exprimer le résultat sous la forme $b\alpha^3 + c\alpha^2$ (b et c réels).

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

A_1 milieu du segment $[A_0\ B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1)\ ;\ B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1)\ ;\ B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.
Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\ ;\ \vec{\imath}\right)$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0\ ;\ v_0 = 12\ ;$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$.
Montrer qu'elle est constante.

Partie C

À partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

Baccalauréat S (obligatoire) Nouvelle Calédonie mars 2005

Exercice 1 **4 points**

Commun tous les candidats

Q1	Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$ est égal à :	$\mathrm{e}^{in\theta}$	☐ Faux ☒ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta^n\right)$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)$	☐ Faux ☒ Vrai
Q2	La partie imaginaire du nombre z est égale à :	$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$	☐ Faux ☒ Vrai
		$\dfrac{z-\overline{z}}{2}$	☒ Faux ☐ Vrai
Q3	Soit z un complexe tel que $z=x+\mathrm{i}y$ (x et y réels). Si z est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :	y^2	☐ Faux ☒ Vrai
		$-y^2$	☒ Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐ Faux ☒ Vrai
Q4	A, B et C sont des points d'affixes respectives a, b et c telles que $\dfrac{b-a}{c-a}=\mathrm{i}\sqrt{3}$, alors :	BC = 2 AC	☐ Faux ☒ Vrai
		$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	☒ Faux ☐ Vrai
		$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\mathrm{CA}^2$	☐ Faux ☒ Vrai

Exercice 2 **5 points**

1. Les contrôles étant indépendants, on a un schéma de Bernouilli de paramètre p (probabilité d'être contrôlé) et $n=40$. On a donc $P(X=k)=\binom{40}{k}p^k(1-p)^{40-k}$.

2. $p=\dfrac{1}{20}$.

a. On a $E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=40}E(X_i)=np=40\times\frac{1}{20}=2$.

b. $P(X=0)=\binom{40}{0}\left(\dfrac{1}{20}\right)^0\left(1-\dfrac{1}{20}\right)^{40}=\left(\dfrac{19}{20}\right)^{40}$.

$P(X=1)=\binom{40}{1}\left(\dfrac{1}{20}\right)^1\left(1-\dfrac{1}{20}\right)^{39}=40\times\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}=2\times\left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}$.

$P(X=2)=\binom{40}{2}\left(\dfrac{1}{20}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{20}\right)^{38}=20\times39\times\dfrac{1}{400}\left(\dfrac{19}{20}\right)^{38}=\dfrac{39}{20}\times\left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}$.

c. La probabilité d'être contrôlé au plus deux fois est $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\approx 0{,}6767(3)$.

3. S'il ne fait pas prendre, le fraudeur gagne 400 €, mais s'il se fait prendre i fois (avec $0\leqslant i\leqslant 40$), il devra débourser $100\times i$ €. On a donc $Z=400-100X$.

Avec $p = \dfrac{1}{5}$, on a $E(Z) = E(400 - 100X) = 400 - 100E(X) = 400 - 100\left(40 \times \dfrac{1}{5}\right) = -400$. En moyenne sur 40 trajets il devra payer 400 €…

4. **a.** $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{40}{0}(1 - p^{40} + \binom{40}{1}p(1-p)^{39} + \binom{40}{2}p^2(1-p)^{38} = (1-p)^{38}\left[(1-p)^2 + 40p(1-p) + 780p^2\right] = (1-p)^{38}\left[741p^2 + 38p + 1\right]$.

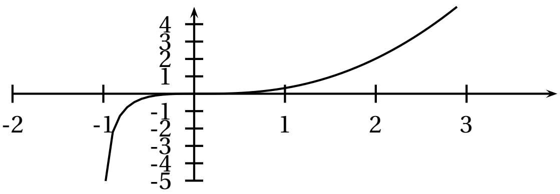
b. On a $f'(x) = 38 \times (-1)(1-x)^{37}\left(741x^2 + 38x + 1\right) + (1-x)^{38}(1482x + 38) = (1-x)^{37}\left[38(-741x^2 - 38x - 1) + (1-x)(1482x + 38)\right] = (1-x)^{37}\left[-20158x^2 - 1444x - 38 + 1482x + 38 - 1482x^2 - 38x\right] = -21640x^2(1-x)^{37} = 21640x^2(x-1)(1-x)^6$.

$f'(x)$ est du signe de $(x-1)$ donc négative sur $[0\,;1]$, et f est décroissante sur cet intervalle de 1 à 0 ; étant continue car dérivable, le théorème de la bijection démontre qu'il existe un réel unique $0 < x_0 < 1$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$.

La calculatrice permet de trouver $\dfrac{19}{100} < x_0 < \dfrac{19+1}{100}$. On a donc $n = 19$.

c. On a $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X) \leqslant 2)$. Donc $P(X \geqslant 3) \geqslant 0{,}99 \iff 1 - P(X \leqslant 2) \geqslant 0{,}99 \iff P(X \leqslant 2) \leqslant 0{,}01$. D'après la question précédente et la décroissance de la fonction f, il faut donc que $p \geqslant x_0$.
La plus petite valeur de p est donc x_0.

Exercice 3 — 6 points



1.

2. **a.** Sur l'intervalle considéré (en fait sur la calculatrice $[-1\ ;\ 3]$ la fonction semble être croissante.

b. La fonction semble s'annuler uniquement pour $x = 0$.

a. Pour$x > -1$, $f'(x) = 2x - 2{,}2 + \dfrac{2{,}2}{x+1} = \dfrac{(2x-2{,}2)(x+1) + 2{,}2}{x+1} = \dfrac{2x^2 - 0{,}2x}{x+1} = \dfrac{x(2x-0{,}2)}{x+1}$. Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x(2x-0{,}2)$ donc positif sauf entre ses racines 0 et 0,1.

b. On a $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et comme $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{2{,}2}{x}\right) + 2{,}2\ln(x+1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit le tableau de variations :

x	-1		0		$0{,}1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$\approx -0{,}0003$	↗	$+\infty$

c. On a bien $f(0) = 0$, mais de plus sur l'intervalle $[0{,}1\ ;\ +\infty[$ la fonction est continue et croissante de $f(0{,}1) < 0$ à $+\infty$. Il existe donc un réel unique x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : 0 et x_0.

d. Les résultats obtenues par étude de la fonction contredisent lesconjectures tirées de l'examen de la calculatrice.

3. **a.** On peut prendre $-0{,}0018 \leqslant y \leqslant 0{,}00111$ en utilisant la fonction Table et en calculant $f(-0{,}1)$ et $f(0{,}2)$.

b. On obtient $f(0{,}15) < 0$ et $f(0{,}16) > 0$. On a donc $0{,}15 < \alpha < 0{,}16$. L'approximation décimale par défaut à 10^{-2} de α est 0,15.

4. **a.** Soit $F'(x) = x^2 - 2{,}2x - 2{,}2 + 2{,}2\ln(x+1) + 2{,}2\dfrac{x+1}{x+1} = f(x)$, donc F est une primitive de f.

b. Sur l'intervalle $[0~;~\alpha]$, $f(x) \leqslant 0$, donc l'intégrale représente l'opposé de l'aire de la surface limitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

c. D'après le **5. a.**, $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\alpha) - F(0) = \frac{\alpha^3}{3} - 1{,}1\alpha^2 + 2{,}2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$.

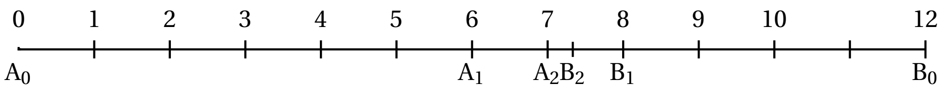
Or $f(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2{,}2\alpha + 2{,}2\ln(\alpha+1) = 0 \iff 2{,}2\ln(\alpha+1) = -\alpha^2 + 2{,}2\alpha$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha^3}{3} - 1{,}1\alpha^2 + (\alpha+1)\left(-\alpha^2 + 2{,}2\alpha\right) = \frac{\alpha^3}{3} - 1{,}1\alpha^2 - 2{,}2\alpha - \alpha^3 + 2{,}2\alpha^2 - \alpha^2 + 2{,}2\alpha = -\frac{2}{3}\alpha^3 + 0{,}1\alpha^2$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A



1. Il semble que pour n assez grand les points A_n et B_n se rapprochent d'une même position limite.

2. On a $A_n = \text{milieu}[A_nB_n] \iff u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

D'autre part $B_{n+1} = \text{bar.}\{(A_n,1)~;~(B_n,2)\} \iff v_{n+1} = \dfrac{1 \times u_n + 2 \times v_n}{1+2} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$.

Partie B

1. Soit $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} - \dfrac{u_n + v_n}{2} = \dfrac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6} = \dfrac{1}{6}(v_n - u_n) = \dfrac{1}{6}w_n$.

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$. Or $w_0 = v_0 - u_0 = 12 - 0 = 12$, donc $w_n = 12 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$. Tous les termes de la suite sont positifs et la raison étant comprise entre -1 et 1, cette suite converge vers 0.

2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{-u_n + v_n}{2} = \dfrac{1}{2}w_n > 0$ d'après la question précédente. La suite (u_n) est donc croissante.

De même $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} v_n = \dfrac{u_n - v_n}{3} = -\dfrac{1}{3}w_n < 0$, d'après la question précédente.

3. D'après les deux questions précédentes les deux suites sont adjacentes car l'une est croissante, l'autre décroissante et la limite de leur différence est nulle. Elles convergent toutes les deux vers la même limite ℓ.

4. On a $t_{n+1} = 2u_{n+1} + 3v_{n+1} = u_n + v_n + u_n + 2v_n = 2u_n + 3v_n = t_n$. cette égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (t_n) est constante. En particulier $t_n = t_0 = 2u_0 + 3v_0 = 3 \times 12 = 36$.

Partie C

On a le système $\left\{\begin{array}{lcl} -u_n + v_n & = & 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n & = & 36 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -2u_n + 2v_n & = & 24 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 2u_n + 3v_n & = & 36 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & +v_n - 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ 5v_n & = & 36 + 24 \times \dfrac{1}{6^n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & +v_n - 12 \times \dfrac{1}{6^n} \\ v_n & = & \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{36}{5} - \dfrac{36}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \\ v_n & = & \dfrac{36}{5} + \dfrac{24}{5} \times \dfrac{1}{6^n} \end{array}\right.$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{36}{5} = 7{,}2$.

La position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini est donc le point d'abscisse 7,2.