

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f , définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1, +\infty[$.
- b. Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances :

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

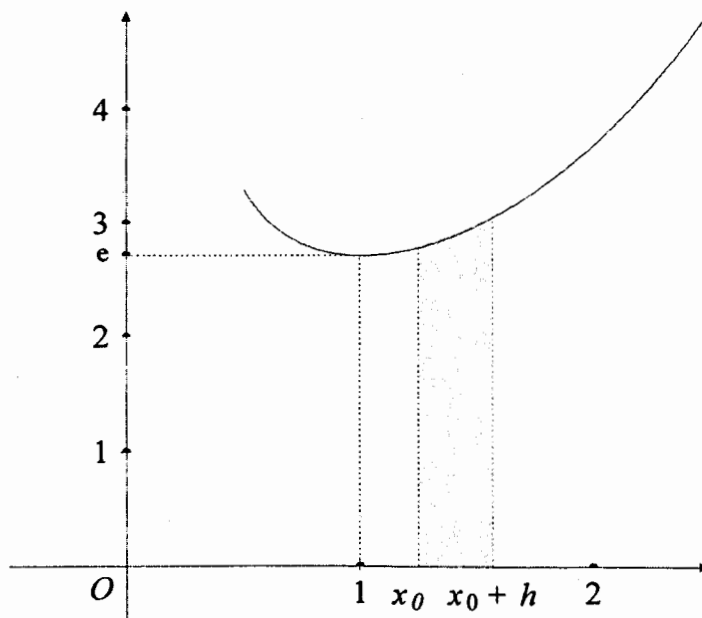
Pour tout réel x_0 de $[1, +\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1, +\infty[$ est une primitive de f .

- a. Que vaut $A(1)$?
- b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1, +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geq 1$?
- d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A .
- e. Conclure.



Exercice 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que:

$$z' = \frac{3+4i}{5} \bar{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que :
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}.$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x=1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' .

Déterminer les entiers y tels que $\operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A , B et C de coordonnées respectives $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 4)$ et $(-1, 1, 1)$.

1. *a.* Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3, 4, -2)$.

Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b. La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A , B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t .

a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t .

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I .

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$.

b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C .

Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

Exercice 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95 u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

- a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1, +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
- d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

- 3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.
 - b. Que peut-on en déduire pour la suite ?
4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement :

$$0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2 : Spécialité

$$z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$$

1. $z = x + iy$ donc $\bar{z} = x - iy$ d'où

$$z' = \frac{3+4i}{5}(x - iy) + \frac{1-2i}{5}$$

$$z' = \frac{3x + 4ix - 3iy + 4y}{5} + \frac{1-2i}{5}$$

$$z' = \frac{3x + 4y + 1}{5} + \frac{4x - 3y - 2}{5}i$$

D'où, comme $z' = x' + iy'$ avec x' et y' réels, $x' = \frac{3x + 4y + 1}{5}$ et $y' = \frac{4x - 3y - 2}{5}$

2. (a) Le point M d'affixe z est invariant si et seulement si $z' = z$.

Donc M d'affixe $z = x + iy$ est invariant si et seulement si (x, y) est solution du système

$$\begin{cases} x = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases}$$

Ce système équivaut à : $x - 2y - \frac{1}{2} = 0$.

L'ensemble des points invariants est donc la droite (Δ) d'équation :

$$(\Delta) : x - 2y - \frac{1}{2} = 0$$

- (b) L'expression complexe de f est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a = \frac{3+4i}{5}$ et $b = \frac{1-2i}{5}$.

f est donc une similitude indirecte. De plus, $|a| = 1$ donc f est un anti-déplacement.

L'ensemble des points invariants de f est la droite (Δ) , donc

f est la symétrie orthogonale par rapport à (Δ) .

3. D = ensemble des points M d'affixe z tels que $z' \in \mathbb{R}$.

Donc $M \in D$ si et seulement si $Im(z') = 0$, c'est à dire, si et seulement si $\frac{4x - 3y - 2}{5} = 0$

D est donc la droite d'équation : $D : 4x - 3y - 2 = 0$.

4. Points de D à coordonnées entières.

- (a) Une solution évidente dans $\mathbb{Z}^2$ de $(4x - 3y = 2)$ est $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$

- (b) (x, y) solution de $(4x - 3y = 2)$ si et seulement si $4(x - x_0) - 3(y - y_0) = 0$.

D'où (x, y) solution de $(4x - 3y = 2)$ si et seulement si $4(x - x_0) = 3(y - y_0)$.

4 et 3 sont premiers entre eux, donc, d'après le Théorème de Gauss, 4 divise $(y - y_0)$ et 3 divise $(x - x_0)$.

Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 3k + x_0$.

On remplace alors x par $3k + x_0$ donc $4(x - x_0) = 3(y - y_0)$, et on obtient: $y = 4k + y_0$.

On vérifie alors que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(3k + 2, 4k + 2)$ est bien solution de $(4x - 3y = 2)$.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc l'ensemble des couples $(3k + 2, 4k + 2)$ avec k quelconque dans $\mathbb{Z}$.

5. $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$.

$Re(z')$ et $Im(z')$ sont entiers si et seulement si 5 divise $(4 + 4y)$ et $(2 - 3y)$. Ceci signifie que

$$(S) : \begin{cases} 4 + 4y \equiv 0[5] \\ 2 - 3y \equiv 0[5] \end{cases} \quad \text{Or, 4 et 5 sont premiers entre eux donc } 4 + 4y \equiv 0[5] \iff 1 + y \equiv 0[5]$$

De même, $-3 \equiv 2[5]$ et 2 et 5 sont premiers entre eux donc: $2 - 3y \equiv 0[5] \iff 2 + 2y \equiv 0[5] \iff 1 + y \equiv 0[5]$

Donc le système (S) équivaut à $1 + y \equiv 0[5]$ ou encore $y \equiv 4[5]$.

Les entiers y sont donc ceux de la forme $y = 5k + 4$ avec k quelconque dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 : Commun à tous les candidats

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$$

$$1. u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}} \leq 0,95 \frac{n^{10}}{2^n} \text{ si et seulement si } \left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 1,9$$

$$\text{D'où } u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$$

$$2. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}, x \in [1; +\infty[$$

(a) f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Pas besoin de calcul de dérivée pour le voir, il suffit de savoir que $\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

(b) $f(1) = 2^{10} > 1,9$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

f est continue sur $[1; +\infty[$ donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe α unique > 1 tel que $f(\alpha) = 1,9$

(c) On prend sa machine à calculer !! Et on remarque de $f(15) > 1,9$ et $f(16) < 1,9$ donc $15 < \alpha < 16$.

Donc $n_0 = 16$.

(d) f est strictement décroissante sur $[16; +\infty[$ et $f(16) < 1,9$.

Donc, en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 16$, $f(n) < 1,9$.

3. (a) La suite (u_n) est positive et pour $n \geq 16$, $u_{n+1} \leq 0,95u_n$, donc pour $n \geq 16$, $u_{n+1} - u_n \leq -0,05u_n < 0$
Donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 16.

(b) (u_n) est décroissante à partir du rang 16 et elle est minorée par 0.

Donc cette suite est convergente vers une limite $L \geq 0$.

4. On pose $P(n)$: " $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$ "

$P(16)$ est vraie !!!! Aucun problème car $0 \leq u_{16} \leq 0,95^0 u_{16}$!!!

Hypothèse de Récurrence : $P(n)$ pour $n \geq 16$.

On suppose que $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16}u_{16}$

On sait que $0 \leq u_{n+1} \leq 0,95u_n$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 0,95 \times 0,95^{n-16}u_{16}$

D'où $0 \leq u_{n+1} \leq 0,95^{n+1-16}u_{16}$ C'est la propriété $P(n+1)$

Conclusion

$P(16)$ est vraie.

Pour tout $n \geq 16$, $P(n) \implies P(n+1)$

Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 16$.

La suite $(0,95^{n-16})$ converge vers 0 car $|0,95| < 1$

Donc la suite (u_n) converge vers 0.