Or, $\dfrac{\ln(2)}{\ln(1,06)} \approx 11,90$.
C'est donc à partir du 12e mois que le nombre films proposés dépassera le double du nombre de films proposés à l'ouverture.

Partie C

1. Diminuer de 10% revient à multiplier par 0,9.
Ainsi, on a bien, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2\,500$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25\,000$.

a. Pour tout entier naturel n,
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - 25\,000\\ &= 0,9v_n + 2\,500 - 25\,000\\ &= 0,9v_n - 22\,500\\ &= 0,9\left(v_n - \frac{22\,500}{0,9}\right)\\ &= 0,9(v_n - 25\,000)\\ &= 0,9w_n \end{aligned}$$
La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est donc bien une suite géométrique de raison $a = 0,9$.
Son premier terme est $w_0 = v_0 - 25\,000 = 15\,000 - 25\,000 = -10\,000$.

b. La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ étant géométrique, on , pour tout entier naturel n :
$w_n = w_0 \times a^n$, soit $w_n = -10\,000 \times 0,9^n$.
Comme, pour tout entier naturel n, on a $w_n = v_n - 25\,000$, on obtient :
$v_n = w_n + 25\,000$, soit $v_n = 25\,000 - 10\,000 \times 0,9^n$.

c. Comme $0 < a < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(0,9^n\right) = 0$.
Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 25\,000$.
Le nombre d'abonnés va donc se stabiliser, sur le long terme, autour de 25 000.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. a. Le graphe Γ n'est pas complet, car par exemple, les sommets D et H ne sont pas adjacents.

b. Le graphe Γ est connexe.
Deux sommets quelconques du graphe peuvent, par exemple, être reliés par une chaîne extraite de celle-ci :

A – B – C – D – E – H – G – F

2. Voici les degrés des différents sommets du graphe Γ :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	3	4	3	4	3	2	3	2

Le graphe Γ, qui est connexe, possède quatre sommets de degré impair.
D'après le théorème d'Euler, ce graphe ne possède donc pas de chaîne eulérienne.

3. La matrice d'adjacence cherchée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. a. ⋆ Le terme d'indice $(2;8)$ de la matrice M est 0; on ne peut donc pas se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en un seul vol.

⋆ Le terme d'indice $(2;8)$ de la matrice M^2 est 0; on ne peut donc pas se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en deux vols.

⋆ Le terme d'indice $(2;8)$ de la matrice M^3 est 4; on peut donc se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H en trois vols et il y a même 4 possibilités.

Le nombre minimal de vols pour se rendre de l'aéroport B à l'aéroport H est donc 3.

b. Voici les trajets possibles :

B – A – E – H ; B – D – E – H ; B – C – G – H ; B – F – G – H

Partie B

Voici l'algorithme de Dijkstra utilisé sur ce graphe :

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0+40 40(A)	∞	0+100 100(A)	0+45 45(A)	∞	∞	∞	B
		40+110 150(B)	40+50 90(B)	45(A)	40+120 160(B)	∞	∞	E
		150(B)	45+40 85(E)		160(B)	∞	45+90 135(E)	D
		85+160 145(D)			160(B)	∞	135(E)	H
		145(D)			160(B)	135+80 215(H)		C
					160(B)	145+50 195(C)		F
						160+55 195(C)		G

Le trajet le moins cher est donc le trajet A – E – D – C – G et coûte 195 €.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f = 0,4 \times \dfrac{1}{v} + 0,4$ avec, pour tout $x \in \mathrm{I} = [0;8]$, $v(x) = 20\,\mathrm{e}^{-x} + 1$.

La fonction v est dérivable et strictement positive sur I.

Par conséquent, la fonction $\dfrac{1}{v}$, puis f sont également dérivables sur I.