CORRIGÉ BAC BLANC TERMINALE STD2A

EXERCICE 1 : Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :
Sur chaque page, le texte est imprimé dans un rectangle de 300 cm² ;
Les marges doivent faire 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.
On veut déterminer les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale.
Pour cela, on pose x la largeur du texte sur la page et y la longueur du texte.

1. L'aire du rectangle de la partie imprimée est égale à $xy = 300$, donc $y = \dfrac{300}{x}$.

2. L'aire de la page complète est égale à $(x + 2 + 2)(y + 1,5 + 1,5) = (x + 4)(y + 3) = xy + 3x + 4y + 12 =$
$4y + 3x + 312 = 4\dfrac{300}{x} + 3x + 312 = \dfrac{1200}{x} + 3x + 312$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1200}{x} + 3x + 312$.

a) La dérivée de la fonction f est
$f'(x) = \dfrac{-1200}{x^2} + 3 = \dfrac{-1200+3x^2}{x^2} = \dfrac{3(-400+x^2)}{x^2} = \dfrac{3(x^2-400)}{x^2} = \dfrac{3(x+20)(x-20)}{x^2}$.

c) Le signe de cette dérivée dépend du produit $(x + 20)(x - 20)$ qui s'annule en $x = 20$ et $x = -20$ et est du signe de $a = 1 > 0$ pour $x \in]-\infty\,;-20] \cup [20\,;+\infty[$ et négatif pour $[-20\,;20]$.

d) D'où le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$:
$f(-20) = \dfrac{1200}{-20} + 3\times(-20) + 312 = 192$ et
$f(20) = \dfrac{1200}{20} + 3\times20 + 312 = 432$.

x	$-\infty$		-20		0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	192	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	432	$\nearrow$	$+\infty$

e) La fonction f admet un maximum local égal à 192 atteint en $x = -20$ et un minimum local égal à 432 atteint en $x = 20$.

4. On en déduit que les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale sont obtenues pour $x = 20$ et $y = \dfrac{300}{20} = 15$. D'où les dimensions de la feuille : $x + 4 = 24$ et $y + 3 = 18$.

EXERCICE 2 : On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ et sa courbe représentative (C) dans un repère du plan.

1. Pour déterminer les coordonnées du centre de symétrie S de la courbe (C), on détermine la dérivée de P :
$P'(x) = 3x^2 - 12x$ et la dérivée de P' : $P''(x) = 6x - 12$; $P''(x) = 0$ pour $6x - 12 = 0$, soit $x = 2$ qui est l'abscisse du point S ; son ordonnée est $P(2) = 2^3 - 6\times2^2 + 32 = 16$. Donc S(2 ; 16).

2. On a $P'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ qui s'annule pour $x = 0$ et $x = 4$; et est du signe de $a = 3 > 0$ pour $x \in]-\infty\,;0] \cup [4\,;+\infty[$ et négatif pour $[0\,;4]$.
$P(0) = 32$ et $P(4) = 4^3 - 6\times4^2 + 32 = 0$.
D'où le tableau de variations de la fonction P :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Le tableau de valeurs complété :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0	25	32	27	16	5	0	7	32

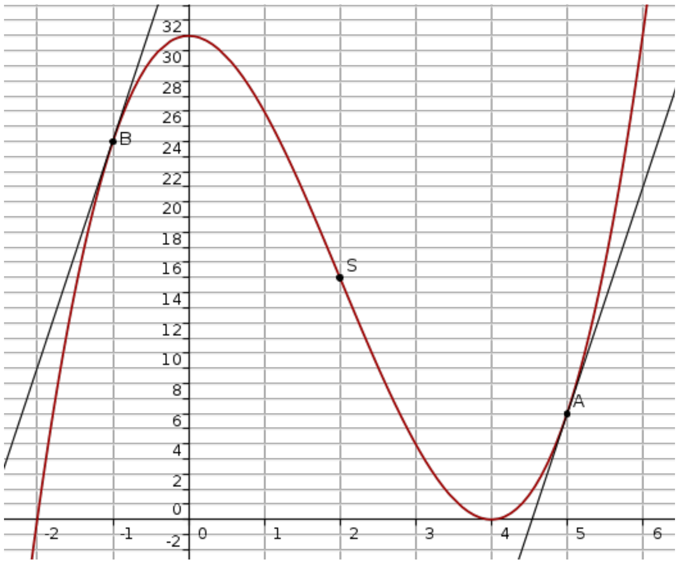
4. Le tracé de la courbe représentative de P (page suivante).

5. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 5 est $P'(5) = 3\times5^2 - 12\times5 = 15$.

6. Les coordonnées du point B symétrique de A par rapport à S : S est le milieu de [AB], donc $x_S = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, d'où
$2x_S = x_A + x_B$, d'où $x_B = 2x_S - x_A = 2\times2 - 5 = -1$ et $y_B = 2y_S - y_A = 2\times16 - 7 = 25$; donc B(– 1 ; 25).

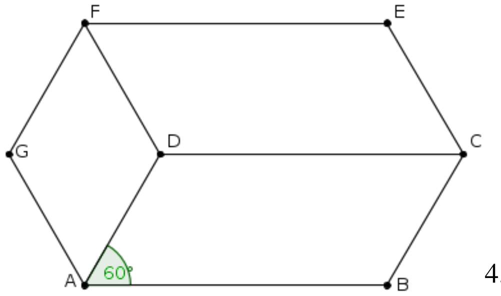
7. La tangente à la courbe au point B et parallèle à la tangente en A : en effet $P'(-1) = 3\times(-1)^2 - 12\times(-1) = 15$.
Ces deux tangentes ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.

8. Les points de la courbe (C) en lesquels les tangentes sont horizontales correspondent aux extremums de la fonction : (0 ; 32) et (4 ; 0).



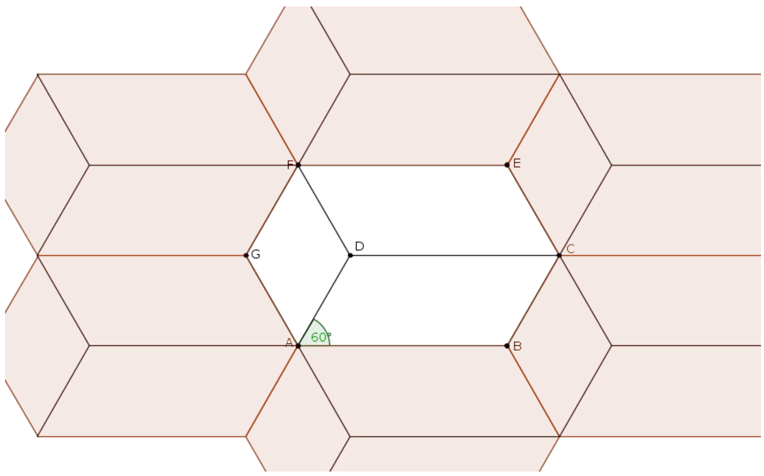
EXERCICE 3 :

1. Construction d'un parallélogramme ABCD de centre O tel que AB = 4 cm, AD = 2 cm et l'angle $\widehat{BAD}$ = 60°, du symétrique DCEF de ABCD par rapport à la droite (CD) et du parallélogramme ADFG :



4. Par symétrie par rapport à la droite (CD), AD = FD, donc les quatre côtés du parallélogramme ADFG sont de même longueur, donc ce parallélogramme ADFG est un losange.

4. Construction du pavage :



5. Dans le triangle ABD,

BD² = AB² + AD² – 2×AB×AD×cos($\widehat{BAD}$)
= $4^2 + 2^2$ – 2×4×2×cos(60) = 16 + 4 – 8 = 12,
donc BD = $\sqrt{12}$ = 2 $\sqrt{3}$.
Par symétrie DE = BD = 2 $\sqrt{3}$.
L'angle $\widehat{BCD}$ = 60° et par symétrie,
$\widehat{DCE}$ = 60°, donc $\widehat{BCE}$ = 120°.
Dans le triangle BCE,
BE² = BC² + CE² – 2×BC×CE×cos($\widehat{BCE}$) =
$2^2 + 2^2$ – 2×2×2×cos(120) = 4 + 4 + 4 = 12,
donc BE = $\sqrt{12}$ = 2 $\sqrt{3}$.
Ainsi, le triangle BDE est équilatéral.

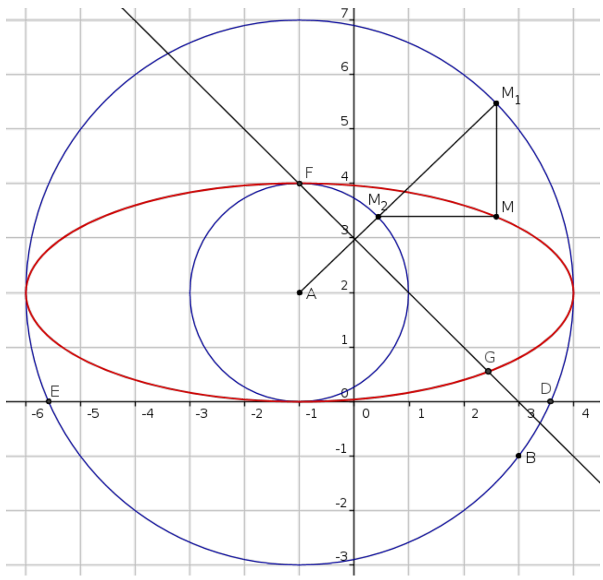
EXERCICE 4 :

1. Dans un repère orthonormé du plan, tracé du cercle (C) de centre A(– 1 ; 2) et passant par B(3 ; – 1).

2. Le rayon du cercle est égal à AB = $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ = $\sqrt{(-1-3)^2 + (2-(-1))^2}$ = $\sqrt{16+9}$ = 5.

Un paramétrage de ce cercle est : $\begin{cases} x(t) = -1 + 5\cos(t) \\ y(t) = 2 + 5\sin(t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Une équation cartésienne du cercle : $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 25$.



4. Les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) avec l'axe des abscisses vérifient les équations $y = 0$ et $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 25$; d'où $(x + 1)^2 + (0 – 2)^2 = 25$ équivaut à $x^2 + 2x + 1 + 4 = 25$ équivaut à $x^2 + 2x – 20 = 0$;
On calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 – 4 \times 1 \times (– 20) = 84 > 0$,
donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{21}}{2} = -1 + \sqrt{21}$ et $x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{21}}{2} = -1 - \sqrt{21}$.
Donc les deux points sont : D(– 1 + $\sqrt{21}$; 0) et E(– 1 – $\sqrt{21}$; 0).

5. L'équation $x^2 + y^2 + 2x – 4y + 1 = 0$ équivaut à
$(x + 1)^2 – 1 + (y – 2)^2 – 4 + 1 = 0$ équivaut à
$(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 4$ qui est l'équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon 2.

6. A l'aide des deux cercles (C) et (C'), tracé de l'ellipse de centre A et de demi-axes $a = 5$ et $b = 2$ avec l'affinité orthogonale (page précédente).

7. Une équation cartésienne de cette ellipse : $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$.

8. Pour savoir si le point D(2 ; 3,5) est sur l'ellipse, on remplace x par 2 et y par 3,5 dans l'équation de l'ellipse :
$\frac{(2+1)^2}{25}+\frac{(3{,}5-2)^2}{4} = \frac{9}{25}+\frac{1{,}5^2}{4} = \frac{36}{100}+\frac{56{,}25}{100} = \frac{92{,}25}{100} = 0{,}9225 \neq 1$ donc le point D n'est pas sur l'ellipse.

9. Les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse et de la droite d'équation $y = -x + 3$ vérifient le système d'équations : $\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{4}=1\\ y=-x+3\end{cases}$ par substitution : $\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(-x+3-2)^2}{4}=1\\ y=-x+3\end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(-x+1)^2}{4}=1\\ y=-x+3\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}\frac{4(x+1)^2}{100}+\frac{25(-x+1)^2}{100}=1\\ y=-x+3\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}4(x+1)^2+25(-x+1)^2=100\\ y=-x+3\end{cases}$

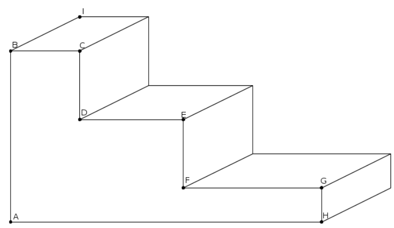
équivaut à $\begin{cases}4x^2+8x+4+25x^2-50x+25=100\\ y=-x+3\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}29x^2-42x+29=100\\ y=-x+3\end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases}29x^2-42x-71=0\\ y=-x+3\end{cases}$. On calcule le discriminant : $\Delta = (-42)^2 - 4\times29\times(-71) = 10000 = 100^2 > 0$, donc il y a deux solutions : $x_1 = \frac{42+100}{2\times29} = \frac{142}{58} = \frac{71}{29} = 2{,}45$ et $x_2 = \frac{42-100}{2\times29} = \frac{-58}{58} = -1$;

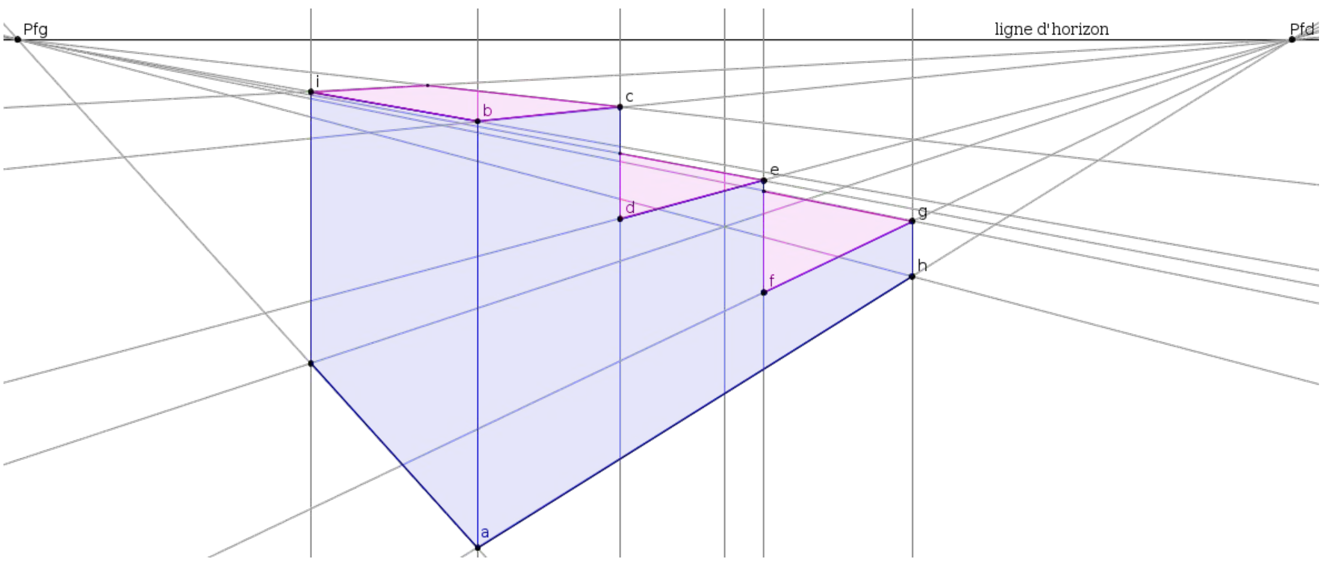
les ordonnées : $y_1 = -\frac{71}{29} + 3 = \frac{16}{29}$ et $y_2 = -(-1) + 3 = 4$.

Les deux points d'intersection sont F(– 1 ; 4) et G($\frac{71}{29}$; $\frac{16}{29}$).

EXERCICE 5 :



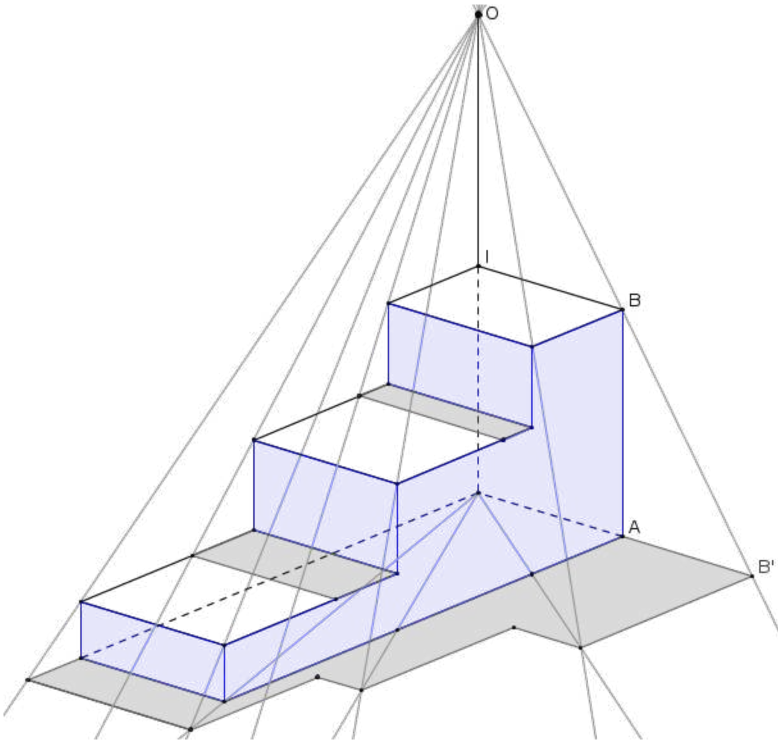
Un concepteur d'étagères propose la conception ci-contre. Cette étagère est formée par l'assemblage de trois pavés droits, représentée en perspective parallèle ci-contre.
Les longueurs CD et EF sont égales, et CD est le double de la longueur GH.
1. Construction de la représentation de l'étagère en perspective centrale.
Les images des points A, B, C, D, E, F, G, H et I dans la représentation en perspective centrale sont notées avec des lettres minuscules a, b, c, d, e, f, g, h et i.



2. Une lampe murale est placé à proximité de l'étagère et la source lumineuse se situe au point O à la verticale du point I (voir la figure de l'annexe 3). L'objectif est de construire l'ombre de l'étagère générée par cet éclairage.
a) La droite (OI) est une verticale, ainsi que la droite (AB) ; elles sont donc parallèles, donc elles sont dans un même plan et les points O, I, A et B appartiennent à un même plan.

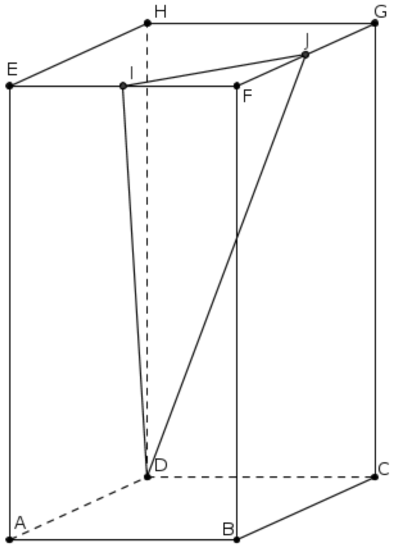
b) Construction du point B’ correspondant à l’ombre du point B : le point B' est l'intersection des droites (OB) et (TA) où le point T est le point d'intersection de (OI) et du sol.

3. Construction de l’ombre de l'étagère générée par cette source lumineuse :



EXERCICE 6 :

On considère le pavé droit ABCDEFGH avec AB = 3, AD = 4 et AE = 6.
Le point I est le milieu de l'arête [EF] et J est le milieu de l'arête [FG].



1. $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ} = (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HI}).(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HJ}) = \overrightarrow{DH}^{\,2} + \overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{HJ} + \overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$;
les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{HI}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{HJ}$, donc $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{HJ} = 0$ et $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{DH} = 0$.
Comme DH = AE = 6, on obtient $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ} = 6^2 + \overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ}$.
On calcule
$\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ} = (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EI}).(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}$;
les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG} = 0$;
de plus $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$, donc $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HE}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}HE^2 = 8$;
$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, donc $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}EF^2 = \frac{9}{2} = 4{,}5$.
$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{GF} = 0$ car $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GF}$ sont orthogonaux.
Donc $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{HJ} = 8 + 4{,}5 = 12{,}5$ et $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ} = 36 + 12{,}5 = 48{,}5$.

2. Le triangle DHI est rectangle en H et le triangle HEI est rectangle en E,
donc $DI^2 = DH^2 + HI^2 = DH^2 + EH^2 + EI^2 = 6^2 + 4^2 + 1{,}5^2 = 36 + 16 + 2{,}25 = 54{,}25$ et $DI = \sqrt{54{,}25} \simeq 7{,}365$.
Le triangle DHJ est rectangle en H et le triangle GHJ est rectangle en G,
donc $DJ^2 = DH^2 + HJ^2 = DH^2 + GH^2 + GJ^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2 = 36 + 9 + 4 = 49$ et DJ = 7.

3. On sait que $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ} = DI \times DJ \times \cos(\widehat{IDJ})$, donc $\cos(\widehat{IDJ}) = \frac{\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DI}}{DI \times DJ} = \frac{48{,}5}{\sqrt{54{,}25 \times 7}} \simeq 0{,}94068$;
et $\widehat{IDJ} = \cos^{-1}(0{,}94068) = 19{,}8°$ à 0,1° près.