A. Fonction dérivée

On considère une fonction f définie sur un intervalle I.

1. Définition : Si la fonction f est dérivable (admet un nombre dérivé) en tout point de l'intervalle I, on définit alors la fonction f' qui à x associe le nombre $f'(x)$; on l'appelle la fonction dérivée de f sur I.

Les fonctions dérivées des fonctions de référence dans le tableau ci-contre:

f(x)	***Dérivable sur***	***f '(x)***
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{x^2}$
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
$\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration: Dérivée de $f(x) = x^2$: On cherche le nombre dérivé de f en a réel:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h} =$$

$\lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$ qui existe pour tout réel a.

Donc la fonction dérivée de la fonction carrée sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = 2x$.

Exemple :

b) On cherche le nombre dérivé de la fonction inverse en a réel non nul:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ah(a+h)} =$$

$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$ qui existe pour tout réel a non nul.

Donc le nombre dérivé de la fonction inverse en a réel non nul est $\frac{-1}{a^2}$, et la fonction dérivée de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$ est $x \to \frac{-1}{x^2}$.

2. Opérations sur les fonctions dérivées : On considère des fonctions u et v dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction $u + v$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est $u' + v'$.

Pour tout réel k, la fonction ku est dérivable sur I et sa fonction dérivée est ku'.

Exemples : Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles sont dérivables sur leur ensemble de définition.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 + 3x - 2 + \frac{1}{x}$. La fonction dérivée de f est la fonction

$f'(x) = 2x + 3 + \frac{-1}{x^2} = \frac{2x^3+3x^2-1}{x^2}$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^2 + 3\sqrt{x}$.

La fonction dérivée de g est $g'(x) = 4\times 2x + 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 8x + \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

B. Applications des fonctions dérivées

1. Sens de variations d'une fonction : On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. On a :

Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors la fonction f est décroissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors la fonction f est croissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I .

2. Extremas d'une fonction : Soit $a \in$ I distinct des extrémités de I ; si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. (Extremum : maximum ou minimum)

Réciproquement : si $f'(a) = 0$ et f' change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.