Toutes les notions de vecteurs vues dans le plan se généralisent à l'espace, en particulier la notion de colinéarité des vecteurs.

A. Rappels :

1. Propriétés : a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à ABDC est un parallélogramme.
b) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ qui est le vecteur nul.
c) Relation de Chasles : pour tous points A, B, C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
d) Vecteur opposé : $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$; on a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
e) Pour tout réel k, on définit le vecteur $k\vec{u}$ par le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de norme $|k|$ fois celle de $\vec{u}$ et de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens opposé si $k < 0$.
e) Vecteurs colinéaires : deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Conséquences : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à : les points A, B et C sont alignés.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

f) Points particuliers : Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) I milieu du segment [AB] ; 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; 3) $\overrightarrow{AI} = ½\ \overrightarrow{AB}$; 4) pour tout point M , on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
1) G est le centre de gravité du triangle ABC ;
2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
3) pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

B. Les vecteurs dans une base :

1. Repère de l'espace : Un repère de l'espace est formé d'un point O origine du repère et de trois vecteurs $\vec{i}$ $\vec{j}$, , $\vec{k}$ non coplanaires de l'espace. Notation : (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Tout vecteur de l'espace s'écrit en fonction des vecteurs ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ;
tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; les nombres réels x, y et z sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), noté $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
Le repère est orthogonal si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux ; et le repère est orthonormé si il est orthogonal et si les vecteurs sont de norme 1.
Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels x, y, z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x, y, z sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et les coordonnées du point M dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Notations : $\overrightarrow{OM}\ (x\ ;\ y\ ;\ z)$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Calculs dans un repère :
$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$; $\vec{u} + \vec{v}$; $k\vec{u}$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si et seulement si les coordonnées sont proportionnelles.

I milieu du segment [AB] : I $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A + z_B}{2} \right)$.

Si le repère est orthonormé : la longueur AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Produit scalaire dans l'espace

1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace :

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconque de l'espace; on définit le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2)$.

Propriétés : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$.

Dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) avec $\vec{u}\,(x;\, y;\, z)$ et $\vec{v}\,(x';\, y';\, z')$,
alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Toutes les propriétés du produit scalaire en géométrie plane s'appliquent dans l'espace.

2. Propriétés du produit scalaire :

a) Propriétés élémentaires :

$(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
$\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

b) Égalités remarquables :

$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;
$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;
$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

c) On considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Alors le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.

De plus, $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

3. Orthogonalité dans l'espace :

3. 1. Orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un est nul ou si l'angle de vecteurs ($\vec{u}$; $\vec{v}$) est égal à $\frac{\pi}{2}$ [π].

Dans ce cas, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Réciproquement, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, alors l'un des vecteurs est nul ou ils sont orthogonaux.

3. 2. Orthogonalité de deux droites :

Deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

3. 3. Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

On considère une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan P de l'espace.

La droite (d) est orthogonale au plan P si et seulement si pour tous points M et N distincts de P, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$, si et seulement si pour tout vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ non colinéaires de P, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}\,' = 0$.

5. Géométrie analytique :

Dans ce paragraphe, on considère un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace.

Si les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}\,(x;\, y;\, z)$ alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Soient $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ deux points de l'espace.

Alors la distance $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Équation d'une sphère de l'espace :

Une sphère de centre $\Omega(a;\, b;\, c)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x;\, y;\, z)$ de l'espace tel que $\Omega M = R$.

Soit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.