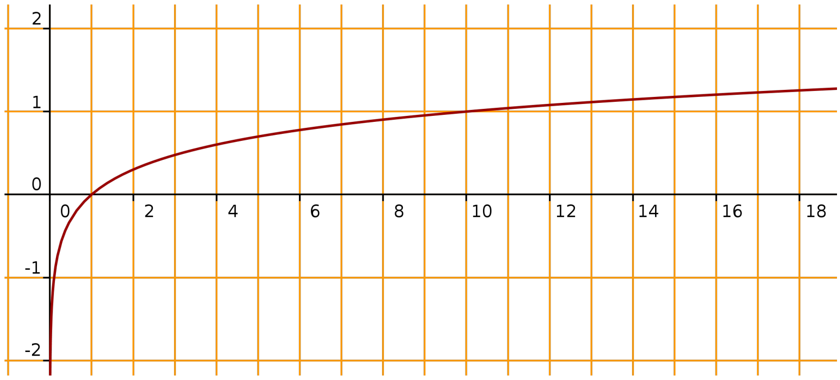
A. La fonction logarithme décimal

1. Définition : La fonction logarithme décimal est la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \log(x)$.
Pour tout nombre $b > 0$, l'unique solution de l'équation $10^x = b$ est le nombre $\log(b)$.
On en déduit que $\log(10) = 1$.
Cette fonction est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
Représentation graphique :

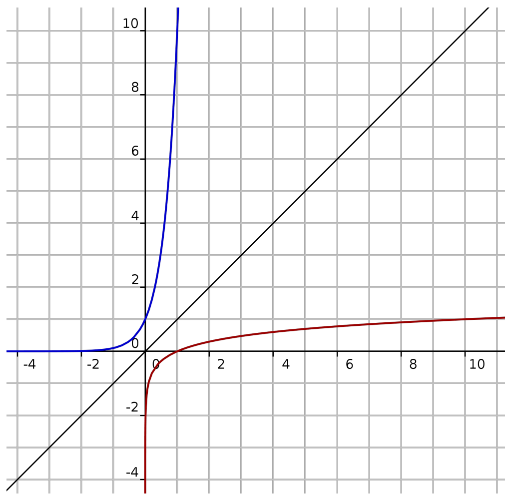


2. Propriété fondamentale : Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.
3. Propriétés : On en déduit les autres propriétés :

$\log\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log(b)$;

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;

pour tout entier relatif n, $\log(a^n) = n\log(a)$.
Ainsi, pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n \log(10) = n$.



Les courbes représentatives des fonctions $\log(x)$ et 10^x sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

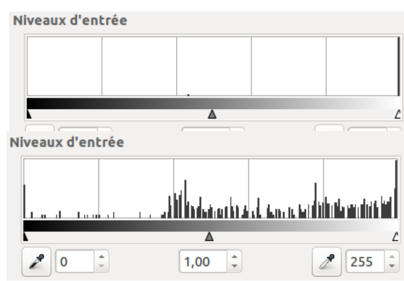
B. Utilisation du logarithme décimal

Quelques grandeurs qui utilisent le logarithme :

1. pH d'une solution chimique $= -\log([H_3O^+])$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ion H_3O^+ en moles/litre.
Si pH = 7 la solution est neutre,
si pH < 7 c'est acide et si pH > 7 c'est basique.
$pH = 7$ équivaut à $-\log([H_3O^+]) = 7$ équivaut à $\log([H_3O^+]) = -7$ équivaut à $[H_3O^+] = 10^{-7} = 0{,}0000001$.

2. Les images : Un histogramme en représentation logarithmique avec Gimp :
Ces boutons déterminent si l'histogramme sera affiché avec un axe y linéaire ou logarithmique. En ce qui concerne les photographies, le mode linéaire est le plus utile. Pour les images qui possèdent de larges aplats de couleur uniforme, l'histogramme linéaire risque de se réduire à quelques barres verticales, et le mode logarithmique sera plus approprié.

Un histogramme est un graphique permettant de représenter la distribution des intensités des pixels d'une image, c'est-à-dire le nombre de pixels pour chaque intensité lumineuse. Par convention un histogramme représente le niveau d'intensité en abscisse en allant du plus foncé (à gauche) au plus clair (à droite).
Ainsi, l'histogramme d'une image en 256 niveaux de gris sera représenté par un graphique possédant 256 valeurs en abscisses, et le nombre de pixels de la classe (niveau d'intensité) de l'image en ordonnées.



Exemple 1 : sur cette image simple en niveau de gris on a tracé un histogramme dont l'échelle est linéaire et un autre dont l'échelle est logarithmique pour faire ressortir les niveaux quand l'image a peu de mode:
Grâce à l'histogramme à échelle log, on peut voir que l'image se compose de quelques intervalles de niveaux de gris.

3. Échelle de Richter sur l'intensité d'un séisme : C'est une échelle logarithmique : la magnitude, dite de Richter, correspond au logarithme de la mesure de l'amplitude des ondes de volume (de type P et S), à 100 kilomètres de l'épicentre. La formule utilise le logarithme décimal : $ML = \log A - \log A_0 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$ où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

Ainsi, par exemple, cela signifie que les ondes sismiques d'un séisme de magnitude 6 ont une amplitude dix fois plus grande que celles d'un séisme de magnitude 5.
Dans la pratique, les séismes de magnitude 9,0 sont exceptionnels et les effets des magnitudes supérieures ne sont plus décrits séparément. Le séisme le plus puissant jamais mesuré atteignant la valeur de 9,5 fut le tremblement de terre de 1960 au Chili.

4. Intensité sonore en décibels : Le niveau sonore d(I), en décibels (db), d'un son d'intensité I est donné par la formule : $d(I) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est l'intensité du seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

Le seuil d'audibilité est 0 dB à 1000 Hz, ce qui correspond à 10^{-12} W/m² (Watt par mètre carré).
L'intensité du son diminue avec l'inverse du carré de la distance.
Pour l'oreille humaine la sensation sonore n'est pas proportionnelle à l'amplitude du son mais au logarithme de cette amplitude.
On voit que l'opération de multiplication de la puissance correspond à une addition pour le calcul du niveau.
L'oreille a une dynamique (domaine de fonctionnement) de 120 à 130 dB (soit de 1 à 10 W/m²).
Les exemples ci-dessous n'ont qu'un intérêt relatif car dans un même endroit le niveau sonore peut varier dans de grandes proportions. Ils permettent toutefois de se faire une idée.

130 dB : avion à réaction au décollage à une distance de 25m ;
120 dB : coup de tonnerre à proximité ;
110 dB : train passant à proximité ;
100 dB : atelier de chaudronnerie en pleine activité ;
90 dB : bruit de circulation intense ;
80 dB : rue animée, salle de réunion ;
70 dB : intérieur d'un train en marche ;
60 dB : conversation courante ;
50 dB : appartement normal ;
40 dB : extérieur calme, campagne ;
30 dB : appartement dans quartier calme ;
20 dB : extérieur très silencieux ;
10 dB : studio d'enregistrement ;
0 dB : seuil d'audibilité.

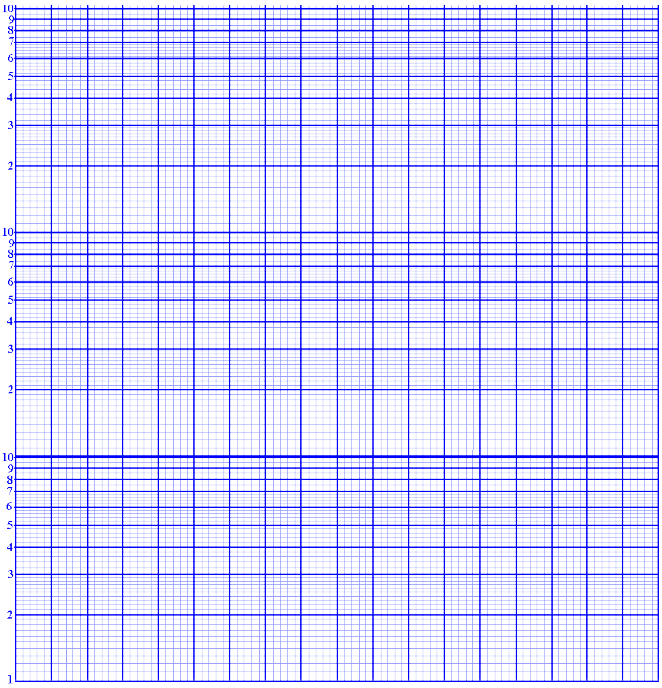
C. Échelle logarithmique

Le problème est de représenter sur un axe des valeurs variant dans un très grand intervalle, de 10 à 10^5 par exemple, en gardant distinguables des valeurs « petites » comme 20, 50, 200, 500, ...
Pour cela on gradue un axe avec des valeurs proportionnelles, non pas à x mais à $\log(x)$.
Dans ce système de graduation, le nombre étiqueté n est placé à une distance $\log(n)$ de l'origine, le logarithme employé ici est le logarithme décimal.

- La distance qui sépare 1 de 10 est la même que celle qui sépare 10 de 100 et celle qui sépare 0,1 de 1 car $\log(100) - \log(10) = \log(10) - \log(1) = \log(1) - \log(0{,}1)$. Chacun de ces intervalles s'appelle un module.
- la distance qui sépare 1 de 2 est égale à celle qui sépare 10 de 20 mais est supérieure à celle qui sépare 2 de 3 car $\log(2) - \log(1) = \log(20) - \log(10) = \log(4) - \log(2) > \log(3) - \log(2)$.

Définition : si l'axe des abscisses est gradué selon une échelle logarithmique et l'axe des ordonnées selon une échelle linéaire, le repère est dit semi-logarithmique.
Si les deux axes sont gradués avec une échelle logarithmique, on parle de graduation logarithmique ou de graduation « log-log ».

Graduation semi-logarithmique



Graduation logarithmique :