A. Introduction des nombres complexes

Au XVIème siècle, des algébristes italiens cherchent à résoudre des équations de degré 3 telles que, par exemple, l'équation $x^3 = 15x + 4$.

En 1547 Giralomo Cardano (1501 – 1576) (dit Cardan) publie le résultat suivant:

Une solution de l'équation $x^3 = px + q$ est $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$. Cette formule devrait permettre de trouver des solutions de l'équation précédente. Mais on trouve $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

Rafaël Bombelli (1526 – 1573) a l'idée d'utiliser les nombres appelés « imaginaires » comme $\sqrt{-121}$ en utilisant les règles usuelles de calculs, en tenant compte du fait que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

Ainsi $\sqrt{-121} = 11\sqrt{-1}$ et $a = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Vérifier que 4 est bien solution de cette équation.

Leonhard Euler en 1777, note le nombre $\sqrt{-1} = i$.

B. Forme algébrique des nombres complexes

1. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

a) Définition : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, contenant l'ensemble $\mathbb{R}$, tel que:

- L'ensemble $\mathbb{C}$ possède un nombre noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés les nombres complexes.

b) Vocabulaire:

Avec $z = a + ib$, le réel a s'appelle la partie réelle de z, noté $\mathrm{Re}(z) = a$; le réel b s'appelle la partie imaginaire de z, noté $\mathrm{Im}(z) = b$.

Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ le nombre complexe z est réel. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ le nombre complexe z est dit imaginaire pur.

c) Égalité de deux nombres complexes : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Soient a, b, a', b' des nombres réels. $a + i\,b = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

Cas particulier : $a + ib = 0$ équivaut à $a = b = 0$.

2. Opérations sur les nombres complexes

On considère les nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

a) **La somme** $z + z'$ est définie par $z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$.

b) **Le produit** zz' est défini par $zz' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

On en déduit en prenant $z' = -1$ que $-z = -a - ib$ et $z - z' = (a - a') + i(b - b')$.

c) **Inverse d'un nombre complexe**: Tout nombre complexe z non nul admet un inverse.

L'inverse de $z = a + ib$ est le nombre complexe $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$. On vérifie que $(a + ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = 1$.

Cet inverse est noté $\frac{1}{z}$.

d) **Conjugué d'un nombre complexe:**

Définition: Soit le nombre complexe $z = a + ib$. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

Propriétés : Le nombre complexe z est réel équivaut à $z = \overline{z}$.

Le nombre complexe z est imaginaire pur équivaut à $z = -\overline{z}$.

Pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.

Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier n : $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{-z} = -\overline{z}$;

$\overline{zz'} = \overline{z}\ \overline{z'}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Et si z' est non nul, $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

3. Représentation graphique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe l'unique point M du plan de coordonnées M(a; b). Le point M s'appelle **l'image** de z.

Réciproquement, à tout point M(a; b) du plan on associe le nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre complexe z s'appelle **l'affixe** de M.

Propriété: Soient M et M' deux points du plan d'affixes respectives $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Le milieu I du segment [MM'] a pour affixe $\frac{z+z'}{2}$.

B. Forme trigonométrique des nombres complexes

1. Module et argument d'un nombre complexe

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M son image dans le plan.

On appelle **module** du nombre complexe z le nombre réel positif égal à la distance OM = $\sqrt{a^2+b^2}$, noté $|z|$.

On appelle **argument** du nombre complexe z non nul, tout nombre réel égal à l'angle de vecteurs ($\vec{u}$; $\overrightarrow{OM}$), noté arg(z). Cet argument est donc défini à 2π près.

Remarque: Les nombres $|z|$ et arg(z) définissent les coordonnées polaires du point M.

Pour déterminer un argument du nombre complexe z on utilise les relations:

Soit (r; θ) des coordonnées polaires de M. Alors $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$ et $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple : Le nombre complexe $1 + i$ a pour module $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Notons θ un argument de $1 + i$. Alors $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Propriétés: Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si ils ont le même module et des arguments égaux modulo 2π.

De manière évidente : $z\,\bar{z} = |z|^2$.

Pour tous nombres complexes z et z' :

		On suppose ici z et z' non nuls
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\mathrm{Arg}(z^n) = n\times \arg(z)$ $[2\pi]$
Inverse	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$ pour z non nul	$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$ $[2\pi]$
Quotient	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ pour z' non nul	$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$ $[2\pi]$
Conjugué	$\lvert\bar{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ $[2\pi]$
Opposé	$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$;	$\arg(-z) = \pi + \arg(z)$ $[2\pi]$.

Ainsi, le module du produit est égal au produit des modules de deux nombres complexes.
Le module de l'inverse est égal à l'inverse du module d'un nombre complexe.
Un argument du produit est égal à la somme des arguments de deux nombres complexes.
Un argument de l'inverse est égal à l'opposé d'un argument d'un nombre complexe.

Démonstration: On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $r' = \sqrt{a'^2+b'^2}$, $\theta = \arg(z)$, $\theta' = \arg(z')$.

<u>Module du produit</u> : $|zz'|^2 = |(aa' - bb') + i(ab' + a'b)| = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 = (aa')^2 + (bb')^2 + (ab')^2 + (a'b)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = |z|^2\,|z'|^2$.

<u>Argument du produit</u> : $\arg(zz') = \arg(r(\cos\theta + i\sin\theta)r'(\cos\theta' + i\sin\theta')) =$
$\arg(rr'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')) = \arg(rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) = \arg(z) + \arg(z')$ $[2\pi]$.

<u>Module de l'inverse</u> : $\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \left|\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right|^2 = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{|z|}$.

<u>Argument de l'inverse</u> : $\arg(\frac{1}{z}) = \arg\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right) = \arg\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \arg(\bar{z}) = \arg(r(\cos\theta - i\sin\theta)) =$
$\arg(r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))) = -\theta = -\arg(z)$ $[2\pi]$. ...

2. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe et M son image dans le plan. On appelle forme trigonométrique du nombre complexe z : $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$.

Si $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, alors la forme trigonométrique est $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Exemples: Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes suivants: $z = 1 + i$ et $z' = 1 - i\sqrt{3}$:

$|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$, donc $z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

$|z'| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$. Notons $\theta = \arg(z')$, $\cos\theta = \frac{a'}{r'} = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{b'}{r'} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. En utilisant le cercle trigonométrique, on trouve que $\theta = \frac{-\pi}{3}$ $[2\pi]$, donc $z' = 2(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3}))$.

Propriétés :

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$;

et $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta'))$.

Notation exponentielle :

Définition : Pour tout nombre réel θ, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Le nombre $e^{i\theta}$ est en fait le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Pour tout nombre complexe non nul z, $z = r\,e^{i\theta}$ où r est le module de z et θ est un argument.

Ainsi $z = r\,e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Propriétés : Pour tous réels θ et θ', $e^{i\theta} \times e^{i\theta} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

et pour tout entier relatif n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Remarque : Le module de $e^{i\theta}$ est 1 et un argument de $e^{i\theta}$ est θ défini modulo 2π.

Formules de Moivre et d'Euler:

1) Formule de Moivre: pour tout réel θ et tout entier n :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ et $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$.

Cette formule se démontre facilement à partir de la notation exponentielle.

2) Formule d'Euler: pour tout réel θ,

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

C. Équation du seconde degré

1. Résolution de l'équation $z^2 = a$ où a est un réel .

Si a est positif, les solutions sont réelles égales à $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $a < 0$, les solutions sont complexes et égales à $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

2. Résolution de l'équation du second degré : $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels et a est non nul.

Cette équation admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$. Considérons $\Delta = b^2 - 4ac$. Plusieurs cas se présentent :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles égales à $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution réelle égale à $z = \frac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes égales à $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Les solutions complexes sont toujours conjuguées : $\overline{z_1} = z_2$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = -12 < 0$, donc l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$ et $z_2 = \frac{2-i\sqrt{12}}{2} = 1-i\sqrt{3}$.

D. Nombres complexes et géométrie

Dans tout ce paragraphe, Le plan est muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1. Affixe d'un vecteur

Définition : A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\vec{w}$ $(a; b)$. Le vecteur $\vec{w}$ s'appelle **le vecteur image** de z.

Réciproquement, à tout vecteur $\vec{w}$ $(a; b)$ du plan on associe le nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre complexe z s'appelle **l'affixe** de $\vec{w}$.

Pour tout point M$(a; b)$ du plan, le nombre complexe $z = a + ib$ est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Pour tout réel k, l'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est kz ; l'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{w}\,'$ est $z + z'$.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leur affixe sont égales.

Soient A et B deux points du plan d'affixes z_A et z_B ; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

2. Propriétés : Soient $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ deux vecteurs d'affixes respectives $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

- L'angle de vecteur ($\vec{u}$; $\vec{w}$) = arg(z) [2π].
- La norme du vecteur $\vec{w}$ est $\|\vec{w}\| = |z|$.
- $\arg(\dfrac{z}{z'}) = (\vec{w}\,' ; \vec{w})$ [2π]. Attention à l'ordre !
- Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ sont colinéaires équivaut à $\dfrac{z}{z'}$ est réel.
- Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ sont orthogonaux équivaut à $\dfrac{z}{z'}$ est imaginaire pur.
- Pour tous points A, B, C, D du plan d'affixes respectives z_A , z_B , z_C , z_D ,tels que A ≠ B et C ≠ D :

  $\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})$ [2π].

Démonstration : Les deux premières propriétés sont évidentes.

Ensuite, $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') = (\vec{u} ; \vec{w}) - (\vec{u} ; \vec{w}\,') = (\vec{w}\,' ; \vec{w})$ [2π] par la relation de Chasles.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ sont colinéaires équivaut à il existe un réel non nul k tel que $\vec{w}\,' = k\vec{w}$ équivaut à $z' = kz$ équivaut à $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{1}{k}$, soit $\dfrac{z}{z'}$ est réel.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ sont orthogonaux équivaut à $(\vec{w}\,' ; \vec{w}) = \dfrac{\pi}{2}$ [π] équivaut à $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \dfrac{\pi}{2}$ [π] équivaut à $\dfrac{z}{z'} = r\,e^{i\frac{\pi}{2}} = ri$ qui est imaginaire pur.

$\arg(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD})$ [2π] provient de la troisième propriété.

E. Écriture complexe de transformations du plan

1. La translation

Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe $a + ib$. Pour tout point M du plan d'affixe z , son image M' par la translation de vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z' = z + a + ib$.

En effet, $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$, soit $z' - z = a + ib$ d'où $z' = z + a + ib$.

2. L'homothétie

Soit Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul. Pour tout point M du plan d'affixe z , son image M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport k a pour affixe $z' - \omega = k(z - \omega)$.

En effet, $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$, soit $z' - \omega = k(z - \omega)$.

3. La rotation

Soit Ω un point d'affixe ω et θ un réel non nul. Pour tout point M du plan d'affixe z , son image M' par la rotation de centre Ω et d'angle θ a pour affixe $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

En effet, $(\overrightarrow{\Omega M} \; ; \; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$, et $\Omega M = \Omega M'$, donc $\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \; [2\pi]$ et $|z' - \omega| = |z - \omega|$, soit si $M \neq \Omega$,

$\frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1$, donc $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ et ainsi $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Exemples: La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture complexe : $z' = iz$.

La symétrie centrale de centre O a pour écriture complexe : $z' = -z$.