COURS TERMINALE S CONTINUITE

A. Fonctions continues

1. Définition: On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un réel a de I.

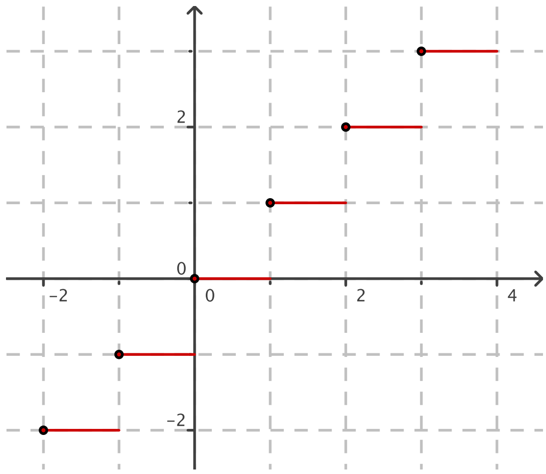
La fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La fonction f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout réel de I.

2. Propriétés:

Les fonctions polynômes, cosinus, sinus sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions inverse, racine carrée, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition. Les sommes, produits, quotients et composée de fonctions continues sont continues sur leur ensemble de définition.

3. Interprétation graphique: Géométriquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I correspond au fait de pouvoir tracer la courbe représentative de f d'un trait continu de crayon.



Exemple: la fonction partie entière, notée E(x) est définie par: pour tout réel x, il existe un entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$. Alors E(x) = n.

La représentation graphique de cette fonction est donnée ci-contre. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas continue en chaque entier relatif.

En effet, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} f(x) = n - 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} f(x) = n$. Ces deux limites ne sont pas égales, donc la fonction partie entière n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.

4. Dérivabilité et continuité

Théorème: Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable en a de I, alors f est continue en a. Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Il est souvent plus facile de démontrer la dérivabilité d'une fonction et d'en conclure qu'elle est continue.

Attention: la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

5. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1: Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b des réels de I tels que $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Démonstration: L'idée est de construire deux suites adjacentes, et d'exploiter le raisonnement pat récurrence.

On peut supposer que $f(a) \leqslant f(b)$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Puis,

si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant k$, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$. Si $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > k$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$.

On a alors $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$ et $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

En utilisant le même procédé, supposons avoir construit $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_{n-1}$ vérifiant

$a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{n-1} \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_1 \leqslant b_0$ et $b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$.

On pose alors : Si $f\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right) \leqslant k$, on pose $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ et $b_n = b_{n-1}$.

Si $f(\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}) > k$, on pose $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$.

On a alors $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

La suite $(\dfrac{b-a}{2^n})$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, donc elle converge vers 0.

Ainsi, les suites (a_n) et(b_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers le même réel c.
Et $a \leqslant c \leqslant b$. La fonction f étant continue en c, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ convergent vers $f(c)$.
Les suites $(f(a_n))$, (k) et $(f(b_n))$ vérifient pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$ et les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ convergent vers la même limite $f(c)$. D'après le théorème des gendarmes, $k = f(c)$.

Théorème 2 : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et a et b des réels de I tels que $a < b$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. Ou, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution c comprise entre a et b.
Démonstration: D'après le théorème 1, il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(c) = k$. Il reste à montrer l'unicité: La fonction f étant strictement monotone, pour tout $x \neq c$, $f(x) \neq f(c)$. Le nombre c est donc l'unique solution de l'équation $f(x) = k$.

Utilisation: les deux théorèmes précédents permettent de déterminer des solutions d'équations du type $f(x) = k$.
On peut justifier l'existence de solutions, localiser ces solutions, et trouver des valeurs approchées à l'aide de la calculatrice.

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = x$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x - x$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue.
Sa dérivée est $f'(x) = -\sin x - 1 \leqslant 0$ puisque $\sin x$ est toujours compris entre -1 et 1. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$; elle vérifie les hypothèses du théorème 2 ci-dessus. Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution c. Ainsi, l'équation $\cos x = x$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On a $f(0) = 1$ et $f(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{-\pi}{2}$, donc la solution c vérifie $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$. Par une méthode algorithmique, on approche la solution, et on obtient $c \simeq 0{,}7391...$