COURS TERMINALE S DERIVABILITE

A. Dérivabilité en un point

1. Nombre dérivé : On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un réel a de I. On considère le point A(a ; $f(a)$) de la courbe C_f représentative de f et le point M($a+h$; $f(a+h)$) pour h réel tel que $a+h$ est dans I. Pour h non nul, le coefficient directeur de la droite (AM) est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Définition : Si la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel, lorsque h tend vers 0, ou si la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un nombre réel, lorsque x tend vers a, alors on dit que f est dérivable en a et la limite est appelée le nombre dérivé de f en a , et est noté $f'(a)$.

On a donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point A(a ; $f(a)$) ;
l'équation de cette tangente est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

2. Approximation affine : Si la fonction f est dérivable en a, pour h proche de 0, $f(a+h)$ est proche de $f'(a)h + f(a)$; on dit que $f'(a)h + f(a)$ est une approximation affine de $f(a+h)$ lorsque h est proche de 0.
Si l'on pose $x = a+h$, alors $f'(a)(x-a) + f(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ lorsque x est proche de a .

Exemples : Pour h proche de 0, $(1+h)^2 \approx 1+2h$; $\dfrac{1}{1+h} \approx 1-h$; $(1+h)^3 \approx 1+3h$ ...

Attention : Le nombre dérivé n'existe pas toujours : $|x|$ et $\sqrt{x}$ en 0 (ces deux fonctions ne sont pas dérivables en 0).

B. Fonction dérivée

1. Définition : Si la fonction f est dérivable en tout point de l'intervalle I, on définit alors la fonction f' qui à x associe $f'(x)$; on l'appelle la fonction dérivée de f sur I. On dit que f est dérivable sur I.

Exemples :

Fonction f	dérivable sur	dérivée f'
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$
$n \in \mathbb{Z},\backslash\{-1\}$ x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$ax+b$	$\mathbb{R}$	a
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$

2. Opérations sur les fonctions dérivées :
Si les fonctions u et v sont dérivables sur I, alors la somme $u+v$, le produit de u par un réel k, le produit uv , sont dérivables sur I ; de plus, si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et leur dérivée sont données dans le tableau ci-contre :

Fonctions	Dérivées
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$uov(x)$	$u'(v(x)) \times v'(x)$
$n \in \mathbb{Z},\backslash\{-1\}$, u^n	$nu^{n-1} \times u'$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(ax+b)$	$a \times u'(ax+b)$

Dérivée d'une fonction composée : Si u est dérivable sur I, et v dérivable sur J tel que pour tout x de J, $v(x)$ est dans I, alors la fonction composée uov est dérivable sur J.

On en déduit les dérivées suivantes :
la fonction u à la puissance n ($n \in \mathbb{Z},\backslash\{-1\}$ et $u(x) \neq 0$ lorsque $n < 0$), la racine de u sur $\{x, u(x) > 0\}$...

Remarque: Les fonctions polynômes, cosinus, sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

C. Applications des dérivées

1. Sens de variations d'une fonction : On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée. On a :

Si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$, alors la fonction f est décroissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$, alors la fonction f est croissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I ;

Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ sauf peut-être en des points isolés où $f'(x) = 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I ;

Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ sauf peut-être en des points isolés où $f'(x) = 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I .

2. Extremas d'une fonction : Soit $a \in$ I distinct des extrémités de I ; si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Réciproquement : si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a , alors f admet un extremum local en a .

Exemple:

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

La fonction f est définie pour les réels x tels que $1 - x^2 \geqslant 0$, soit $x \in [-1; 1]$.

Nous allons voir que la fonction f n'est pas dérivable sur cet intervalle.

Dérivabilité en – 1 :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(-1+h)\sqrt{2h-h^2}-0}{h} =$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-2}{h}+2\sqrt{2h-h^2} = -\infty$$, donc la fonction f n'est pas dérivable en – 1. Cette limite indique que la courbe admet une tangente verticale en $x = -1$.

On montre de même que la fonction f n'est pas dérivable en 1. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert]– 1; 1[.

Sa dérivée est $f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée est du signe de $1 - 2x^2$ qui s'annule en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{2}}{2}$. Ces valeurs donnent les extremums de la fonction.

Le reste de l'étude est accessible. La courbe et certaines tangentes sont données ci-contre.