## A. L'équation différentielle $y' = ay + b$

### 1. Généralités

Résoudre l'équation différentielle $y' = ay + b$ sur un intervalle I, c'est trouver toutes les fonctions $f$ dérivables sur I telles que $f'(x) = af(x) + b$. Dans la plupart des cas, I = $\mathbb{R}$.
Cette équation différentielle est dite du premier ordre, linéaire, à coefficients constants.

### 2. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ ($a$ réel)

*Théorème*: Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = ay$ sont les fonctions $f_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ où $k$ est un réel quelconque.
*Démonstration*: Il est facile de montrer que la fonction $f_k(x) = ke^{ax}$ est solution de l'équation (E).
Considérons une fonctions $g$ solution de (E) et considérons la fonction $h$ définie par $h(x) = e^{-ax}g(x)$. Cette fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont, et $h'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}g'(x) = e^{-ax}(-ag(x) + g'(x)) = 0$ puisque $g$ est solution de (E). Donc la fonction $h$ est constante, et pour tout réel $x$, $h(x) = k$ , donc $g(x) = ke^{ax}$ .

*Exemple*: Résoudre l'équation $3y' = 2y$;

On écrit l'équation sous la forme $y' = \frac{2}{3}y$ , qui donne les solutions $f_k(x) = k\,e^{\frac{2}{3}x}$ où $k$ est un réel quelconque.

### 3. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a$ et $b$ réels, $a \neq 0$)

*Théorème*: Les fonctions solutions de l'équation différentielle (E') : $y' = ay + b$ sont les fonctions $f_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k$ est un réel quelconque.

*Démonstration*: La fonction $g$ définie par $g(x) = -\frac{b}{a}$ est solution de (E') (facile à vérifier). Une fonction $f$ est solution de (E') équivaut à $f'(x) = af(x) + b$, soit $f'(x) - af(x) = b$ équivaut à $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$ , équivaut à $f'(x) - g'(x) = af(x) - ag(x)$ qui s'écrit $(f(x) - g(x))' = a(f(x) - g(x))$ équivaut à $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Les solutions sont les fonctions $f_k$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ où $k$ est un réel quelconque.

Donc $f(x) - g(x) = ke^{ax}$ , donc $f(x) = ke^{ax} + g(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k$ est un réel quelconque.

*Exemple*: Résoudre l'équation $2y' = 8y - 5$ ;

On écrit l'équation sous la forme $y' = 4y - \frac{5}{2}$ , qui donne les solutions $f_k(x) = k\,e^{4x} + \frac{5}{8}$ où $k$ est un réel quelconque.

*Théorème*: Pour tous réels $x_0$ et $y_0$ , il existe une unique fonction $f$ solution de l'équation (E') telle que $f(x_0) = y_0$ .
*Démonstration*: L'existence d'une solution a été établie précédemment. Soient $f$ et $g$ deux solutions de (E') vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$ et $g(x_0) = y_0$ . Dans ce cas, $f(x) = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$ , et $g(x) = k'e^{ax} - \frac{b}{a}$ où $k$ et $k'$ sont des réels.

Donc $f(x) - g(x) = (k - k')e^{ax}$ .
Et $f(x_0) - g(x_0) = 0$, donc $(k - k')\,e^{ax_0} = 0$, soit $k = k'$ puisque $e^{ax} > 0$, pour tout réel $x$. Et donc $f(x) = g(x)$. La solution est bien unique.
*Exemple*: Trouver la solution de l'équation $2y' = 8y - 5$ qui s'annule en 1:

Les solutions sont $f_k(x) = k\,e^{4x} + \frac{5}{8}$ , vu précédemment. On veut que $f_k(1) = 0$, soit $k\,e^{4\times 1} + \frac{5}{8} = 0$, donc $k = \frac{-5e^{-4}}{8}$

La solution est $f(x) = \frac{-5e^{-4}}{8}\,e^{4x} + \frac{5}{8} = \frac{5(1-e^{4x-4})}{8}$ .

## B. Équations se ramenant à $y' = ay + b$

### 1. Equation avec second membre

On cherche à résoudre des équations différentielles sur I de la forme (E") : $y' - ay + b = t(x)$ où $t$ est une fonction définie sur I. On cherche une solution particulière de (E") et on lui ajoute les solutions de (E').

*Exemple 1*: ($E_1$): $y' - 3y = 2e^{1-x}$.

a) Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{-1}{2}e^{1-x}$ est solution de l'équation ($E_1$).

b) Montrer que $f$ est solution de ($E_1$) équivaut à $f - g$ solution de ($E_1$'): $y' - 3y = 0$. En déduire les solutions de ($E_1$).

Solution: a) $g'(x) = \dfrac{1}{2}e^{1-x}$, d'où $g'(x) - 3g(x) = \dfrac{1}{2}e^{1-x} - 3(\dfrac{-1}{2}e^{1-x}) = 2e^{1-x}$. Donc $g$ est solution de l'équation ($E_1$).

b) $f$ est solution de ($E_1$) équivaut à $f'(x) - 3f(x) = 2e^{1-x}$ équivaut à $f'(x) - 3f(x) = g'(x) - 3g(x)$ équivaut à $f'(x) - g'(x) = 3f(x) - 3g(x)$ équivaut à $(f(x) - g(x))' = 3(f(x) - g(x))$ équivaut à $f - g$ solution de ($E_1$'): $y' - 3y = 0$.

Donc $f(x) - g(x) = ke^{3x}$ où $k$ est un réel quelconque. Ainsi $f(x) = ke^{3x} + g(x) = ke^{3x} + \dfrac{-1}{2}e^{1-x}$ qui sont les solutions de ($E_1$).

*Exemple 2*: ($E_2$): $2y' + 6y = x^2 + 2x - 1$.

a) Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation ($E_2$).

b) Montrer que $f$ est solution de ($E_1$) équivaut à $f - P$ solution de ($E_2$'): $2y' + 6y = 0$. En déduire les solutions de ($E_2$).

Solution: a) Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, d'où

$P'(x) = 2ax + b$, et $2P'(x) + 6P(x) = 2(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6ax^2 + (4a + 6b)x + 2b + c$ qui doit être égal à $x^2 + 2x - 1$. Par identification, on trouve $6a = 1$, $4a + 6b = 2$ et $2b + c = -1$, soit $a = \dfrac{1}{6}$, $b = \dfrac{2}{9}$ et $c = \dfrac{-13}{9}$.

Donc le polynôme P définie par $P(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{13}{9}$ est solution de l'équation ($E_2$).

b) $f$ est solution de ($E_2$) équivaut à $2f'(x) + 6f(x) = x^2 + 2x - 1$ équivaut à $2f'(x) + 6f(x) = 2P'(x) + 6P(x)$ équivaut à $2f'(x) - 2P'(x) + 6f(x) - 6P(x) = 0$ équivaut à $2(f(x) - P(x))' + 6(f(x) - P(x)) = 0$ équivaut à $f - P$ solution de ($E_2$'): $2y' + 6y = 0$. ($E_2$') s'écrit $y' = -3y$. Les solutions de ($E_2$') sont les fonctions $x \to ke^{-3x}$.

Donc $f(x) - P(x) = ke^{-3x}$ où $k$ est un réel quelconque. Ainsi $f(x) = ke^{-3x} + P(x) = ke^{-3x} + \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{13}{9}$ qui sont les solutions de ($E_2$).

### 2. Transformation d'écritures

On cherche à résoudre des équations différentielles plus compliquées sur un intervalle I se ramenant à une équation de la forme $y' = ay + b$ par une transformation d'écriture.

*Exemple*: Un biologiste observe la croissante d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1000 bactéries. Soit $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant $t$ ( exprimé en heures ). Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle : $N'(t) = 0{,}07N(t)(1 - 10^{-3}N(t))$ appelée équation logistique. On suppose que, pour tout $t$, $N(t)$ est non nul.

On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Montrer que P est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

En déduire l'expression de P, puis celle de N.

Si $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$, alors $N(t) = \dfrac{1}{P(t)}$ et $N'(t) = \dfrac{-P'(t)}{P(t)^2}$, donc $\dfrac{-P(t)}{P(t)^2} = 0{,}07\dfrac{1}{P(t)}(1 - 10^{-3}\dfrac{1}{P(t)})$, soit $\dfrac{-P'(t)}{P(t)^2} = \dfrac{0{,}07P(t) - 0{,}07\times10^{-3}}{P(t)^2}$, soit $P'(t) = -0{,}07P(t) + 0{,}07\times10^{-3}$ qui est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}07$ et $b = 0{,}07\times10^{-3}$.

Le reste de l'exercice est laissé au lecteur.