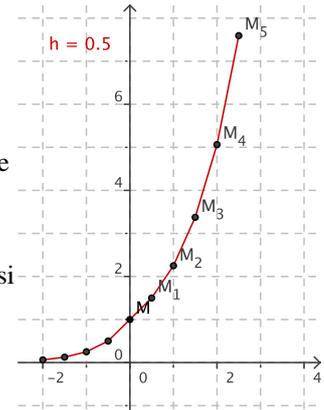


A. Approximation d'une courbe par la méthode d'Euler

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I , et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

On suppose connu un point $M(x_0 ; y_0)$ de la courbe C . On sait que pour h non nul proche de 0, l'approximation affine de la fonction f donne : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$. Soit $x_1 = x_0 + h$ et $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0) = y_0 + hf'(x_0)$. On obtient un point $M_1(x_1 ; y_1)$.

Soit $x_2 = x_1 + h$ et $y_2 = f(x_1) + hf'(x_1) = y_1 + hf'(x_1)$. On obtient un point $M_2(x_2 ; y_2)$, et ainsi de suite. On trace alors les segments $[MM_1]$, $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, etc... qui donne une approximation de la courbe C représentative de f . Plus h est proche de 0 et plus l'approximation est bonne.



B. L'équation différentielle $f' = kf$

1. Résultat préliminaire : On considère une fonction f dérivable sur \mathbb{R} et un nombre réel k tels que, pour tout réel x ,

$f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = 1$. Alors la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

Démonstration : On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$. Cette fonction g est dérivable sur \mathbb{R} comme produit et composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

On a $g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = kf(x) \times f(-x) + f(x) \times (-kf(-x)) = 0$.

Donc la fonction g est constante sur \mathbb{R} égale à $g(0) = f(0) \times f(0) = 1^2 = 1$.

Donc, pour tout réel x , $g(x) = f(x) \times f(-x) = 1$, et $f(x) \neq 0$.

2. Etude de l'équation $f' = f$.

Théorème : il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**, notée \exp .

Démonstration : L'existence de la fonction est conjecturée par la méthode d'Euler qui

permet de construire une courbe solution de l'équation différentielle $f' = f$ (voir figures ci-contre). On peut toutefois démontré l'unicité: on considère la fonction g solution de l'équation différentielle $f' = f$ et tel que $g(0) = 1$. Soit h la

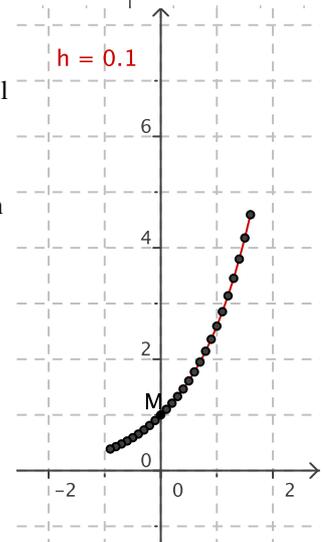
fonction définie par $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. Cette fonction h est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}

et $f(x) \neq 0$ d'après B. 1.

$$\text{On a } h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f(x)^2} = 0.$$

Donc la fonction h est constante sur \mathbb{R} égale à $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$.

Ainsi, pour tout réel x , $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ et donc $g(x) = f(x)$. La fonction \exp est donc unique.



3. Etude de l'équation $f' = kf$.

Théorème : il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est définie sur \mathbb{R} par $\exp(kx)$.

Démonstration : Existence: En prenant $f(x) = \exp(kx)$, cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} , comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et $f(0) = \exp(0) = 1$. Et $f'(x) = k \exp(kx)$ (en utilisant la dérivée des fonctions composées: $(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) v'(x)$). Cette fonction est bien solution de l'équation $f' = kf$ et $f(0) = 1$.

Unicité: Démonstration similaire à celle de la partie 2 en considérant une fonction g solution de l'équation différentielle

$$f' = kf \text{ et telle que } g(0) = 1 \text{ et la fonction } h \text{ définie par } h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

C. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1: La fonction exponentielle transforme une somme en produit:

Pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration: Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ pour y réel fixé. (On sait que $\exp(x) \neq 0$ sur \mathbb{R}).

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$; donc la fonction g est

constante sur \mathbb{R} , et égale à $g(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$. D'où $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$.

Ainsi, pour tous réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Propriété 2: En prenant $y = -x$, il vient

$$\exp(x + y) = \exp(x - x) = \exp(x) \times \exp(-x),$$

$$\text{donc } 1 = \exp(x) \times \exp(-x) \text{ et ainsi } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Propriété 3: De plus,

$$\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

Notation: La fonction exponentielle a les mêmes propriétés que celles portant sur les puissances entières. On décide de noter $\exp(x) = e^x$.

La calculatrice nous donne $\exp(1) = e^1 \simeq 2,7182821828\dots$

Résumé: Pour tous réels x et y , et tout entier relatif n :

$$e^0 = 1; \quad e^x > 0$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x};$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}; \quad (e^x)^n = e^{xn};$$

D. Étude de la fonction exponentielle

1. Variations: D'après l'étude précédente, la fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} , $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

D'après le paragraphe B.1, la fonction ne s'annule pas, et étant continue puisque dérivable, elle ne change pas de signe; de plus comme $\exp(0) = 1$, elle est toujours positive, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2. Limites:

Propriétés: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Démonstration: Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

Sa dérivée est $g'(x) = e^x - 1$ qui est positive sur $[0; +\infty[$ et négative sur $] -\infty; 0]$. La fonction g admet donc un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = 1$. Donc pour tout réel x , $g(x) \geq 1$; ainsi, $e^x - x \geq 1$ et $e^x \geq x + 1$.

En utilisant un théorème sur les comparaisons de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, donc $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$. Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc e^{-x} tend vers $+\infty$, et $\frac{1}{e^{-x}}$

tend vers 0. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Tableau de variations:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	+			
e^x				

3. Approximation affine de e^h pour h proche de 0:

L'approximation affine de e^h pour h proche de 0 est donnée par $e^h \simeq e^0 + h \exp'(0) = 1 + h$.

4. Représentation graphique de la fonction exponentielle:

Tangentes à la courbe représentative de \exp :

Au point d'abscisse 0: l'équation de la tangente est $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$.

Au point d'abscisse 1: l'équation de la tangente est $y = \exp'(1)(x - 1) + \exp(1) = ex - e + e = ex$. Cette tangente passe par l'origine du repère.

Position de la courbe par rapport à ces tangentes:

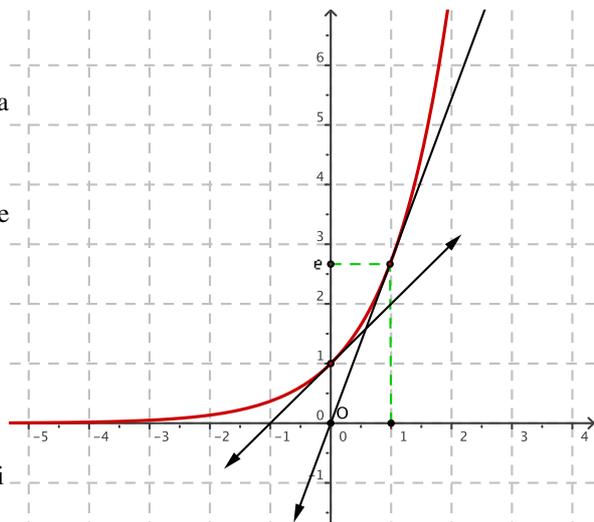
Il s'agit de montrer que la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes. Pour cela, considérons l'équation de la tangente T à la courbe C de la fonction exponentielle au point d'abscisse a :

$$y = \exp'(a)(x - a) + \exp(a) = e^a (x - a + 1).$$

Pour étudier la position de C par rapport à T, il suffit d'étudier le signe de la fonction f définie sur \mathbb{R}

$$\text{par } f(x) = e^x - e^a (x - a + 1).$$

Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et $f'(x) = e^x - e^a$. Cette dérivée s'annule en $x = a$ et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , alors f est décroissante sur $]1 - 1 ; a]$ et croissante sur $[a ; +[$. Elle admet donc un minimum en $x = a$ qui vaut $f(a) = e^a - e^a (a - a + 1) = 0$. Donc la fonction f est positive sur \mathbb{R} ; ainsi, pour tout réel x, $e^x \geq e^a (x - a + 1)$. Donc la courbe C est toujours au-dessus des tangentes T. Une telle fonction est appelée une fonction convexe.



5. Dérivée de e^u où u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u' e^u$. Il suffit d'utiliser la formule de dérivation des fonctions composées : $(v \circ u(x))' = (v'(u(x)) \times u'(x))$.

Exemple: déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = \exp(x^2 - 2x) = e^{x^2 - 2x}$.

Cette fonction est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et $f'(x) = (2x - 2) e^{x^2 - 2x}$. On sait que, pour tout réel x, e^x est strictement positif, donc $e^{x^2 - 2x} > 0$. Le signe de la dérivée est donné par le signe de $2x - 2$ qui s'annule en $x = 1$.

D'où le tableau de variations de cette fonction :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	e^{-1}	$+\infty$

6. Quelques limites à connaître:

Propriétés: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration: a) On a vu en D. 2 que pour tout réel x, $e^x \geq x + 1 > x$, donc $\frac{e^x}{2} > \frac{x}{2}$. Pour $x > 0$, on élève au carré

$\left(\frac{e^x}{2}\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2$ qui donne $e^x > \frac{x^2}{4}$. D'où, pour $x > 0$, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$. En utilisant un théorème sur les comparaisons de

limites, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

b) Posons $X = -x$; lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-X}{e^X} = 0$ d'après le a).

c) On utilise le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = (e^0)' = 1$.