A. Limite d'une fonction en + ∞

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme [a ; + ∞ [; plusieurs cas se présentent :

a) Si les valeurs $f(x)$ dépassent n'importe quel réel M donné dès que x est suffisamment grand,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Si les valeurs de $f(x)$ sont aussi proche que l'on veut d'un réel l dès que x est assez grand, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

On dit alors que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f .

c) Si $f(x) < 0$ et | $f(x)$ | dépassent n'importe quel réel M donné dès que x est suffisamment grand,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

d) Cas des fonctions de référence :

$f(x)$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\lvert x \rvert$	$1/x$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	0^+

B. Limite d'une fonction en a réel

1) a = 0 : on suppose que f est définie sur] - b ; 0 [∪] 0 ; b [, avec b réel > 0 ; il faut déterminer la limite de f lorsque x est négatif (à gauche de 0) et la limite de f lorsque x est positif (à droite de 0) :

Notations : x tend vers 0 à droite (par valeurs positives) : $x \to 0^+$ ou $\begin{array}{l} x \to 0 \\ x > 0 \end{array}$

x tend vers 0 à gauche (par valeurs négatives) : $x \to 0^-$ ou $\begin{array}{l} x \to 0 \\ x < 0 \end{array}$

a) Si les valeurs de $f(x)$ dépassent n'importe quel réel dès que x est suffisamment proche de 0 par valeurs positives, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$; dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale à C_f.

b) Si les valeurs de $f(x)$ sont aussi proche que l'on veut d'un réel l dès que x est suffisamment proche de 0 par valeurs positives, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = l$.

Exemples : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x} = 0$.

2) a quelconque : on suppose que f est définie sur] b ; a [∪] a ; c [; il faut déterminer la limite de f lorsque x est à gauche de a : $\begin{array}{l} x\to a \\ x > a \end{array}$, et la limite de f lorsque x est à droite de a : $\begin{array}{l} x\to a \\ x < a \end{array}$:

a) Si les valeurs de $f(x)$ dépassent n'importe quel réel M dès que x est suffisamment proche de a par valeurs supérieures à a, alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$; dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f.

b) Si $f(x) < 0$ et | $f(x)$ | dépassent n'importe quel réel M donné dès que x est proche de a par valeurs supérieures à a, alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$; dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .

Exemples : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$; la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction qui à x associe $\frac{1}{x-2}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{2x+3}{1-x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2x+3}{1-x} = +\infty$; la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction qui à x associe $\frac{2x+3}{1-x}$.

C. Opérations sur les limites : Dans ce qui suit, α est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; l et l' sont des réels.

1) Limites de kf où k est un réel non nul :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} kf(x)$	kl	$+\infty$ si $k > 0$ et ∞ si $k < 0$	∞ si $k > 0$ et $+\infty$ si $k < 0$

2) Limites de $f + g$:

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	∞
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	l'	l'	∞	$+\infty$	∞
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)+g(x)$	$l + l'$	$+\infty$	?	$+\infty$	∞

3) Limites de fg :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	l	$+\infty$	$+\infty$	∞	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	l'	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)*g(x)$	ll'	$+\infty$	∞	∞	?

4) Limites de f / g :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$	l	l	$l < 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0^+	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$
$\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	?	?	$+\infty$	∞

Les quatre résultats où apparaissent des points d'interrogation indiquent qu'il n'est pas possible de déterminer la limite dans ces cas là. On les appelle les formes indéterminées.

Il faudra utiliser une transformation d'écriture des fonctions f et g pour pouvoir déterminer cette limite.

Exemples : On cherche à déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x\sqrt{x})$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x\sqrt{x} = +\infty$. On obtient une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Il faut lever l'indétermination. Ici, on peut factoriser l'expression par x^2 :

$x^2 - 2x\sqrt{x} = x^2(1 - \frac{2}{\sqrt{x}})$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{2}{\sqrt{x}}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x\sqrt{x}) = +\infty$.

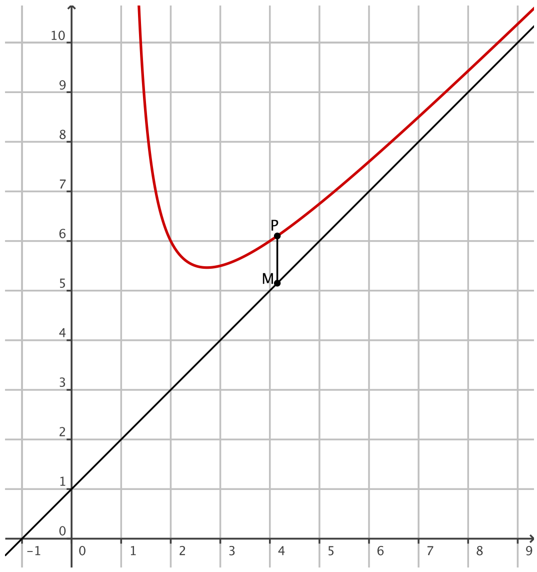
5) Propriétés: La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exemples: On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^5 - 5x^4 - 4x^2)$. D'après la propriété , $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^5 - 5x^4 - 4x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} 7x^5 = +\infty$.

On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^3 + 5x^2 + 4}$. D'après la propriété , $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^3 + 5x^2 + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$.

D. Asymptote oblique : Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère une fonction f définie sur $]m ; +\infty[$, C_f sa représentation graphique, et une droite (d) d'équation $y = ax + b$; on dit que (d) est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$.



Graphiquement, lorsque x devient grand, la courbe C_f se rapproche de la droite (d). En fait, si P est un point de C_f d'abscisse x, et M un point de la droite (d) de même abscisse, alors la distance MP tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Et (d) est asymptote à C_f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0$.

Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{3}{x-1}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(x+1)] = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(x+1)] = 0$. Donc la droite (d) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f $+\infty$ et en $-\infty$ (figure ci-dessus) .

E. Théorème de comparaison

Dans ce paragraphe, α représente un réel ou bien $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Comparaison à l'infini

Si pour x assez proche de α, on a l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$.

Si pour x assez proche de α, on a l'inégalité $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

2. Théorème des gendarmes

Si pour x assez proche de α, on a l'encadrement $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = k$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = k$.

Ces théorèmes sont comparables avec ceux étudiés sur les suites numériques.

Exemples: 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sin x$. Pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, alors $-1 \leqslant -\sin x \leqslant 1$, et $2x - 1 \leqslant f(x)$; puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, alors pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{-1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$; puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

F. Limite d'une fonction composée

Théorème: α, β, γ sont des réels ou bien $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et si $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} gof(x) = \gamma$.

Exemples d'utilisation:

1. On considère la fonction f définie sur $[3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3-3x^2+1}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-3x^2+1) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x-3}{2x+1}\right)$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi x-3}{2x+1} = \dfrac{\pi}{2}$, et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.