COURS TERMINALE S LOIS DE PROBABILITÉS CONTINUES

1. Loi de probabilité à densité

Définition: Une loi de probabilité P définie sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ est déterminée par une fonction f définie, continue et positive sur $[a; b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Cette fonction f est appelée la fonction de densité de la probabilité P.
Attention, a et b peuvent être infini.

Pour tout intervalle $[c; d]$ contenu dans $[a; b]$, la probabilité de $[c; d]$ est égale à $\int_c^d f(x)dx$.

Soit X une variable aléatoire définie sur cette loi de probabilité ; alors $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$.

Et l'espérance mathématique de X est $E(X) = \int_a^b xf(x)dx$.

2. Loi uniforme

Définition: On appelle loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$, la loi de probabilité P dont la fonction de densité f est une fonction constante sur $[a; b]$. Soit, pour x dans $[a; b]$, $f(x) = k$.

Dans ce cas, puisque $\int_a^b f(x)dx = 1$, on obtient $\int_a^b k\,dx = [kx]_a^b = k(b-a) = 1$, la constante $k = \frac{1}{b-a}$.

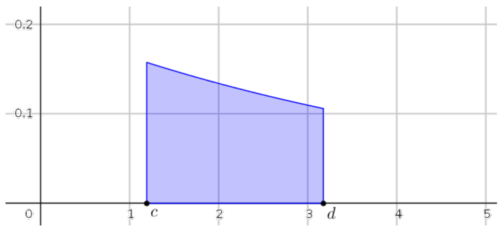
Propriété: Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$.
Alors, pour tout intervalle $[c; d]$ contenu dans $[a; b]$, la probabilité $P(X \in [c; d]) = P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$.

Propriété: L'espérance mathématique de X est égale à $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration exigible : $E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$.

3. Loi exponentielle

Définition: Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est la densité d'une loi de probabilité P, appelé loi exponentielle de paramètre λ.



Remarque: On peut démontrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t f(x)dx = 1$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0; +\infty[$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors pour tous réels c et d de $[0; +\infty[$,
$P(X \in [c; d]) = \int_c^d f(x)dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.

Et pour tout réel t de $[0; +\infty[$, $P(X \in [0; t]) = 1 - e^{-\lambda t}$.
On a donc $p(X \in [t ; +\infty [) = p(X \geq t) = e^{-\lambda t}$.

Propriété: L'espérance mathématique de X est égale à $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration exigible : $E(X) = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t xf(x)dx$. $\int_0^t xf(x)dx = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx$.

On cherche une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ de la forme $G(x) = (ax + b)\, e^{-\lambda x}$;
$G'(x) = (a - \lambda(ax + b))\, e^{-\lambda x} = (-\lambda ax + a - \lambda b)\, e^{-\lambda x}$. On trouve $a = -1$ et $b = \frac{-1}{\lambda}$. $G(x) = (-x + \frac{-1}{\lambda})\, e^{-\lambda x}$.

Ainsi $\int_0^t \lambda x e^{-\lambda x}dx = G(t) - G(0) = (-t + \frac{-1}{\lambda})\, e^{-\lambda t} - \frac{-1}{\lambda} = (-t + \frac{-1}{\lambda})\, e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}$.

On trouve E(X) = $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t xf(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-te^{-\lambda t}+\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)dx = \frac{1}{\lambda}$.

4. Loi de durée de vie sans vieillissement

La durée de vie d'un individu au sens statistique du terme est une variable aléatoire T à valeurs dans $[0; +\infty[$, où l'événement $(T \le t)$ avec $t \ge 0$, signifie que l'individu est vivant à l'instant t.
On dit que T suit une loi de durée de vie sans vieillissement si la probabilité que l'individu soit vivant à l'instant $t + h$ ($h \ge 0$), sachant qu'il est vivant à l'instant t, ne dépend pas de t.
C'est-à-dire $P_{(T \ge t)}(T \ge t + h)$ ne dépend pas de t.

Si cette probabilité ne dépend pas de t, on peut prendre $t = 0$, et $P_{(T \ge t)}(T \ge t + h) = P_{(T \ge 0)}(T \ge h)$.
Comme l'événement $(T \ge 0)$ est l'événement certain, $P_{(T \ge 0)}(T \ge h) = P(T \ge h)$. Donc $P_{(T \ge t)}(T \ge t + h) = P(T \ge h)$.

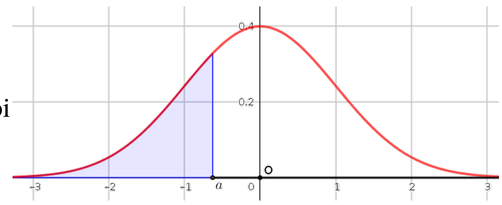
D'après la définition des probabilités conditionnelles, $P_{(T \ge t)}(T \ge t + h) = \dfrac{P((T\ge t)\cap(T\ge t+h))}{P(T\ge t)}$.

L'événement $(T \ge t + h)$ est contenu dans l'événement $(T \ge t)$.
Ainsi $\dfrac{P((T\ge t)\cap(T\ge t+h))}{P(T\ge t)} = \dfrac{P(T\ge t+h)}{P(T\ge t)} = P(T \ge h)$. On pose $g(t) = P(T \ge t)$ pour $t \ge 0$.
On obtient $g(t + h) = g(t)\, g(h)$ pour $t \ge 0$ et $h \ge 0$. En admettant que la fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$, on a vu que $g(t) = e^{at}$ avec a dans . Comme g est une probabilité, $g(t) \le 1$, donc $a < 0$. On pose alors $\lambda = -a > 0$.
Ainsi la loi de durée de vie sans vieillissement est une loi exponentielle.
Applications: Durée de vie d'un composant électronique, d'un appareil électrique; durée de vie d'une substance radioactive...

5. Lois normales

a) Loi normale centrée réduite :

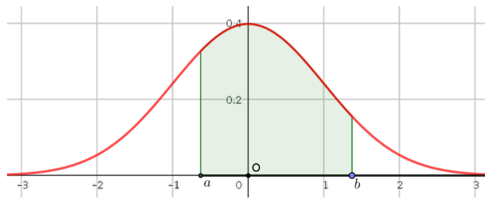
Définition: La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ est la densité d'une loi de probabilité P, appelé loi normale centrée réduite.



Remarque: On peut démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

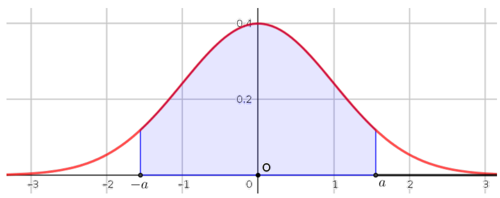
Propriété : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui suit une loi normale centrée réduite.

Alors pour tous réels c et d de $\mathbb{R}$, $P(X \in [c; d]) = \int_c^d f(x)\,dx$.



La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative donnée ci-contre est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriétés : $P(X \le 0) = P(X \ge 0) = 0{,}5$.
Pour tout réel u de $\mathbb{R}$, $P(X \le -u) = P(X \ge u) = 1 - P(X \le u)$.
$P(-u \le X \le u) = 1 - 2P(X \ge u) = 2P(X \le u) - 1$.



Propriété: L'espérance mathématique de X est égale à E(X) = 0 et son écart-type est 1.

Théorème : Pour tout réel α de [0 ; 1], il existe un unique réel u_α tel que $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Démonstration exigible : D'après la symétrie de la courbe, $P(-u \le X \le u) = 2P(0 \le X \le u) = 2\int_0^u f(x)\,dx = 2F(u)$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0. La fonction F est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, et $\lim\limits_{u\to+\infty} F(u) = 0{,}5$.

Pour tout réel α de [0 ; 1], $1 - \alpha \in [0; 1]$; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α de $[0 ; +\infty[$ tel que $2F(u_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est-à-dire $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Valeurs particulières :
Si $\alpha = 0{,}05$ alors $u_\alpha \simeq 1{,}96$ ($u_{0,05} = 1{,}96$).
Si $\alpha = 0{,}01$ alors $u_\alpha \simeq 2{,}58$ ($u_{0,01} = 2{,}58$).

<u>b) Loi normale $N(\mu; \sigma^2)$:</u>
Définition: Soient μ et σ deux nombres réels, σ différent de 0. Une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
Z s'appelle la variable aléatoire centrée réduite de X.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$.
L'espérance mathématique de X est $E(X) = \mu$ et son écart-type $\sigma(X) = \sigma$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$.
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu - \sigma) \simeq 0{,}68$ (à 10^{-2} près) ;
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu - 2\sigma) \simeq 0{,}95$ (à 10^{-2} près) ;
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu - 3\sigma) \simeq 0{,}997$ (à 10^{-3} près).

<u>Utilisation de la calculatrice :</u>

Une variable aléatoire X suit une loi normale N(100 ; 49).
a) Calculer $P(X < 115)$ et $P(X \geq 89)$ à 10^{-3} près.
b) Calculer $P(75 < X < 105)$ et $P(100 \leq X \leq 110)$ à 10^{-3} près.
c) Déterminer à 10^{-1} près le réel u tel que $P(X \leq u) = 0{,}9$.
d) Déterminer à 10^{-1} près le réel u tel que $P(X \leq u) = 0{,}9$.

Attention : l'écriture N(100 ; 49) correspond à $N(100 ; 7^2)$;
l'espérance est égale à 100 et l'écart-type est égal à 7.

Saisir : `2nde var (distrib) normalFRép entrer` ; on obtient l'écran :

```
     normalFRép
borninf :
bornsup :
μ :
σ :
```

Compléter avec les valeurs fournies.
Les réponses : $P(X < 115) = 0{,}984$; $P(X \geq 89) = 0{,}942$;
$P(75 < X < 105) = 0{,}762$; $P(100 \leq X \leq 110) = 0{,}423$.
Pour obtenir le réel *u :*
Saisir `2nde var FracNormale entrer` ; on obtient l'écran :

```
     FracNormale
aire:
μ :
σ :
```

Compléter avec les valeurs fournies (aire = 0,9).
Les réponses : $u = 108{,}97$.

Exercices :

1. Une variable aléatoire X suit une loi normale N(0 ; 1).

a) Calculer $P(X < 1)$ et $P(X \geq 1)$ à 10^{-3} près : ……………………………………………………………………………..

b) Calculer $P(-0,5 < X < 0,5)$ et $P(0 \leq X \leq 2)$ à 10^{-3} près : ……………………………………………………………..

c) Déterminer à 10^{-2} près le réel u tel que $P(X \leq u) = 0,95$: ……………………………………………………………….

d) Déterminer à 10^{-2} près le réel u tel que $P(X \leq u) = 0,99$: ……………………………………………………………….

e) Déterminer à 10^{-2} près le réel u tel que $P(-u \leq X \leq u) = 0,92$: ………………………………………………………

2. Une variable aléatoire X suit une loi normale N(28 ; 9).

a) Calculer $P(X < 15)$ et $P(X \geq 30)$ à 10^{-3} près : …………………………………………………………………………..

b) Calculer $P(25 < X < 28)$ et $P(30 \leq X \leq 32)$ à 10^{-3} près : …………………………………………………………….

c) Déterminer à 10^{-2} près le réel u tel que $P(X \leq u) = 0,95$: ……………………………………………………………….

d) Déterminer à 10^{-2} près le réel u tel que $P(X \leq u) = 0,99$: ……………………………………………………………….

e) Déterminer à 10^{-2} près le réel u tel que $P(-u \leq X \leq u) = 0,92$: ………………………………………………………

6. Intervalle de fluctuation

Définition : Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n ; p)$ et α un réel de $[0 ; 1]$.
On appelle intervalle de fluctuation de X au seuil $1 - \alpha$, tout intervalle $[a ; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 1 - \alpha$.

Théorème de Moivre-Laplace : Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n ; p)$
avec n non nul et p dans $]0 ; 1[$. On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ (Z_n est la variable aléatoire centrée réduite de X_n).

Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$;

ce qui revient à dire que la suite de variables aléatoires (Z_n) tend vers une loi normale centrée réduite.

Théorème : Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n ; p)$.
Pour tout réel α de $[0 ; 1]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$, où $I_n = \left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
(I_n est appelé <u>intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $1 - \alpha$</u>) ;
u_α désigne l'unique réel positif tel que $P(- u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ et Z suit la loi $N(0 ; 1)$.

Démonstration exigible : On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$. D'après le théorème de Moivre-Laplace, on a
$\lim\limits_{n \to +\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = P(- u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$, où Z suit la loi $N(0 ; 1)$.
Or $P(- u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = P(np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}) =$
$P\left(p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{X_n}{n} \leq np + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$.

<u>Test de conformité :</u>
On considère une population dans laquelle on étudie un caractère avec une proportion de référence connue p. On note F_n la variable fréquence du caractère dans un échantillon. Soit f une valeur de la variable F_n pour un échantillon.
Règle de décision :
Soit I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $1 - \alpha$. La règle de décision est la suivante :
Si $f \notin I$, on rejette l'hypothèse de conformité de l'échantillon avec un risque d'erreur inférieur à α ;
Si $f \in I$, on ne rejette pas l'hypothèse de conformité de l'échantillon avec un risque d'erreur inférieur à α.

Remarque : En pratique, on utilise l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

<u>7. Estimation d'un proportion inconnue :</u>
On considère une population et on veut connaître une proportion p présentant un certain caractère.
La procédure d'estimation consiste à utiliser les informations recueillies dans un échantillon de taille n, sélectionné de manière aléatoire dans la population. On suppose que la population est de taille suffisante pour assimiler cet échantillon à un tirage avec remise.
Cet échantillon fournit une valeur f de la variable fréquence F_n, destinée à fournir une estimation de p.
On sait que cette estimation varie d'un échantillon à l'autre, en raison de la fluctuation d'échantillonnage autour de p. Il est donc nécessaire d'apprécier l'incertitude en fournissant une estimation par intervalle,
appelé <u>intervalle de confiance</u> de p.

Définition : Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance de 0,95 est un intervalle aléatoire obtenue à partir d'un échantillon et contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

Propriété : Pour un échantillon de taille n assez grand, l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p à un niveau de confiance de 0,95.