1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace :

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconque de l'espace; on définit le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Propriétés : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{u}\,(x; y; z)$ et $\vec{v}\,(x'; y'; z')$,
alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Toutes les propriétés du produit scalaire en géométrie plane s'appliquent dans l'espace.

2. Propriétés du produit scalaire :

a) Propriétés élémentaires :

$(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$;
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$.
$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

b) Égalités remarquables :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$;
$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

c) On considère alors les points A, B et C définis par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Le point H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
Alors le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.

De plus, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

3. Orthogonalité dans l'espace :

3. 1. Orthogonalité de deux vecteurs :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un est nul ou si l'angle de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est égal à $\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Dans ce cas, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Réciproquement, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, alors l'un des vecteurs est nul ou ils sont orthogonaux.

3. 2. Orthogonalité de deux droites :

Deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

3. 3. Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

On considère une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan P de l'espace.
La droite (d) est orthogonale au plan P si et seulement si pour tous points M et N distincts de P, $\vec{u}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$, si et seulement si pour tout vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ non colinéaires de P, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}\,' = 0$.

4. Vecteur normal à un plan :

4. 1. Définition : Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan P si et seulement s'il est non nul et est orthogonal à tout vecteur de P.

4. 2. Propriété : Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan P s'il est non nul et est orthogonal à deux vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\vec{v}\,'$ de P.

<u>Théorème</u> : Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M de l'espace tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ est le plan P contenant A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Réciproquement, soit P un plan de l'espace et A un point de P; le plan P est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$.

5. Géométrie analytique :

Dans ce paragraphe, on considère un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace.

Si les coordonnées de $\vec{u}$ sont $\vec{u}$ (x; y; z) alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Soient A(x_A ; y_A ; z_A) et B(x_B ; y_B ; z_B) deux points de l'espace. Alors la distance
AB = $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

5. 1. Équation cartésienne d'un plan :

<u>Théorème</u> : Soit $\vec{n}$ (a; b; c) un vecteur non nul.

Les plans orthogonaux à $\vec{n}$ ont une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

Le plan orthogonal à $\vec{n}$ et passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et tel que $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.

<u>Démonstration</u> : Pour tout point M(x; y; z) du plan P contenant A et orthogonal à $\vec{n}$ (a; b; c) , les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc leur produit scalaire est nul : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, soit $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$ qui est un équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ en posant $d = - ax_A - by_A - cz_A$.

5. 2. Distance d'un point à un plan :

<u>Théorème</u> : Soit A un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur non nul et P le plan orthogonal à $\vec{n}$ et passant par A. Pour tout point M de l'espace, on note H son projeté orthogonal sur le plan P. Alors la distance MH est égale à $\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

<u>Démonstration</u> : Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est colinéaire à $\vec{n}$; donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HM} = k\,\vec{n}$; de plus $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM}$; d'où $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AM})\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}$ puisque les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. Ainsi $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n} = k\,\vec{n}\cdot\vec{n} = k.\|\vec{n}\|^2$. Donc $k = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$ et ainsi

$\overrightarrow{HM} = k\,\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}$. D'où HM = $\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2}\,\|\vec{n}\| = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

<u>Propriété</u> : Soit M_0 (x_0 ; y_0 ; z_0) un point de l'espace et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Alors la distance du point M_0 au plan P est égale à $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

<u>Démonstration</u> : Le vecteur $\vec{n}$ (a; b; c) est normal à P et $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Soit A(x_1 ; y_1 ; z_1) un point de P. On a donc $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$. Alors pour tout point M(x; y; z) de l'espace ,

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = ax + by + cz + d$.

D'où la distance de M_0 à P est égale à $\dfrac{|\overrightarrow{AM_0}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

5. 3. Équation d'une sphère de l'espace :

Une sphère de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R est l'ensemble des points M(x; y; z) de l'espace tel que ΩM = R. Soit $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

5. 4. Intersection de droites et de plans :

<u>a) Intersection de deux plans :</u> Soient P et P ' les plans d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Pour étudier la position relative des deux plans, on étudie leurs vecteurs normaux $\vec{n}$ (a; b; c) et $\vec{n}\,'$ (a'; b'; c') :

- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont colinéaires, alors les plans P et P ' sont parallèles; si de plus, les coefficients sont tous proportionnels, alors les plans sont confondus.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ ne sont pas colinéaires, alors les plans P et P ' sont sécants suivant une droite dont on peut trouver une représentation paramétrique.
- Si $\vec{n}$ et $\vec{n}\,'$ sont orthogonaux, alors les plans P et P ' sont orthogonaux.

b) <u>Intersection d'une droite et d'un plan :</u>

Soient P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_O + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

. On a donc $\vec{n}$ $(a; b; c)$ un vecteur normal à P et $\vec{u}$ $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ un vecteur directeur de (d).

Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, alors (d) est parallèle à P. Elle peut être incluse dans P.
Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux, alors (d) coupe P en un unique point.
Si de plus, $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, alors (d) est orthogonale à P.
Par le calcul : On remplace x, y et z par leur expression issue de la représentation paramétrique de (d) dans l'équation de P, et on résout en t.
Si l'équation est de la forme $0t = 0$, alors la droite est incluse dans le plan.
Si l'équation est de la forme $0t$ 0, alors la droite est strictement parallèle à P.
Si on trouve une unique valeur pour t, alors la droite et le plan se coupent en un unique point dont les coordonnées sont déterminées à l'aide de la valeur de t trouvée.

c) <u>Intersection de trois plans :</u> Soient P, P ' et P '' les plans d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ et $a''x + b''y + c''z + d' = 0$.
Pour étudier la position relative de ces trois plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}.$$

Méthode de résolution : la méthode du pivot de Gauss : sur un exemple :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ 4x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

; on élimine l'inconnue x dans les lignes L_2 et L_3 en utilisant des combinaisons linéaire :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_1 - 2L_2 \\ 2L_1 - L_3 \end{array}\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ -7y + 7z + 6 = 0 \\ -4y + 9z + 7 = 0 \end{cases} ; \begin{array}{l} L_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{array}\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ -7y + 7z + 6 = 0 \\ -4y + 9z + 7 = 0 \end{cases}$$

on élimine l'inconnue y dans la ligne L_3 en utilisant des combinaisons linéaire :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_1 - 2L_2 \\ 2L_1 - L_3 \end{array}\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ -7y + 7z + 6 = 0 \\ -4y + 9z + 7 = 0 \end{cases}$$