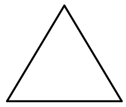
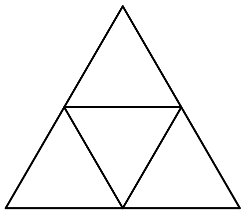
Cours — Terminale S — Le raisonnement par récurrence

0. Propriétés portant sur *n* :

a) On empile des triangles équilatéraux comme sur la figure ci-contre. Lorsque la base contient n triangles, dénombrer le nombre de triangles au total.

Nombre de rangée	***dessin***	***Nombre de triangles***
1		1
2		4

Quelle conjecture peut-on faire sur le nombre de triangles avec n rangées de triangles de base ?

b) On peut vérifier que $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$. Cette propriété est-elle vraie pour toute valeur entière, c'est-à-dire a-t-on $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$ pour tout entier naturel n ?

1. Objectif: Le but est de démontrer une propriété vraie pour un certain nombre d'entiers naturels .
On note P_n cette propriété pour l'entier naturel n.
La propriété P_n peut s'énoncer par:

- une égalité, comme : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- une inégalité, comme : la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$ vérifie $u_n \leq 2$.
- une phrase, comme $n^2 + 1 \geq 2n$.

...

2. Le principe de récurrence: Dans la plupart des situations, on cherche à démontrer une propriété pour une infinité de valeurs de n. Pour cela, on cherche à prouver les deux étapes suivantes:

- Etape 1: initialisation: la propriété P_n est vraie pour une valeur n_0 .
- Etape 2: hérédité: on considère que la propriété P_n est vraie pour une valeur $k \geq n_0$ et on démontre qu'elle est alors vraie pour la valeur $k + 1$.

Ainsi, si la propriété P_n est vraie pour n_0 , alors elle est vraie pour $n_0 + 1$, et si elle est vraie pour $n_0 + 1$, alors elle est vraie pour $n_0 + 2$, etc... Ce qui permet de prouver que P_n est vraie pour tous les entiers naturels $n \geq n_0$.
Remarque: Dans la plupart des cas, $n_0 = 0$, et dans ce cas la propriété P_n est vraie pour tous les entiers naturels n.

3. Premier exemple : Reprenons l'égalité: Pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Etape 1: initialisation: la propriété est vraie pour $n = 1$: $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

Etape 2: hérédité: on considère que la propriété est vraie pour une valeur k , c'est-à-dire que

$1 + 2 + 3 + ... + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ et démontrons qu'elle est vraie pour la valeur $k + 1$:

$1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \dfrac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

qui correspond bien à l'égalité de départ en remplaçant n par $k + 1$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Attention: les deux étapes sont nécessaires. En effet l'hérédité seule ne suffit pas. Considérons la phrase: $10^n + 1$ est divisible par 9.

Etape 2: hérédité: on considère que la propriété est vraie pour une valeur k, c'est-à-dire que $10^k + 1$ est divisible par 9, donc il existe un entier naturel p tel que $10^k + 1 = 9p$; et démontrons qu'elle est vraie pour la valeur $k + 1$: dans ce cas, $10^{k+1} + 1 = 10\times10^k + 1 = 10\times(10^k + 1 - 1) + 1 = 10\times(9p - 1) + 1 = 90p - 10 + 1 = 90p - 9 = 9(10p - 1)$, qui est divisible par 9. Donc l'hérédité fonctionne. Malheureusement, on ne peut pas trouver une valeur n_0 tel que $10^{n_0}+1$ est divisible par 9.

Donc le nombre $10^n + 1$ n'est jamais divisible par 9, quelle que soit n entier naturel.

4. Autre exemple: On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+6}$. A partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant 3$.

Etape 1: initialisation: la propriété est vraie pour $n = 0$: $0 \leqslant 3$.

Etape 2: hérédité: on considère que la propriété est vraie pour une valeur k, c'est-à-dire que $u_k \leqslant 3$ et démontrons qu'elle est vraie pour la valeur $k + 1$: $u_{k+1} \leqslant 3$: On obtient $u_k + 6 \leqslant 9$, et par la croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{u_k+6} \leqslant \sqrt{9}$, soit $u_{k+1} \leqslant 3$, ce qui est la propriété en remplaçant n par $k + 1$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$.

5. Problèmes pouvant se résoudre à l'aide du raisonnement par récurrence:

a) Pour tout entier naturel n, le nombre $5^n - 2^n$ est divisible par 3.

b) Pour tout entier naturel n, le nombre $4^n - 1$ est divisible par 3. Et qu'en est-il de $4^n + 1$?

c) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + 1$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.

d) Pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + n + 2$ est pair.

e) Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n}$.

f) La somme des carrés des n premiers entiers est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

g) La somme des cubes des n premiers entiers est égale au carré de la somme des n premiers entiers.

h) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n+2}$. Alors (u_n) est croissante et majorée par 2.