A. Notation - Définition

Définition : une suite numérique (u_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On note (u_n) la suite de nombres $u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Le nombre u_n est le terme d'indice n (ou de rang n). u_o est le premier terme de la suite.

Exemples : $u_n = 3^n$ (formule explicite en fonction de n) , $u_n = (1 + 5/100)^n$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et u_o donné (formule récurrente : un terme de la suite s'écrit en fonction du ou des précédents), $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et u_o donné ...

B. Les suites arithmétiques

La suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est appelé la raison de la suite.

Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p + (n - p)r$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique : S = $n \times$ (demie somme des termes extrêmes) .

Exemples : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$; $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

C. Les suites géométriques

La suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = qu_n$.

Le réel q est appelé la raison de la suite.

Propriétés : Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$. Pour tous entiers naturels n et p , $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.

Somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique : S = premier terme $\times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$,

et S = $n \times$ premier terme si $q = 1$.

Exemple : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

D. Sens de variation d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite (u_n) est **strictement croissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est **strictement décroissante** si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.

Technique : a) on peut chercher à comparer $u_{n+1} - u_n$ à 0, ou si tous les termes de la suite sont strictement positifs, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

b) Si $u_n = f(n)$, alors les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ donne les variations de (u_n).

Exemple : sens de variation d'une suite arithmétique : $f(n) = u_0 + nr$, f est une fonction affine;

si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ; si $r = 0$, (u_n) est constante.

E. Suites majorées, minorées, bornées

Définition : Soit (u_n) une suite de nombre réels. La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant$ M.

La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Technique : pour montrer qu'une suite est majorée (ou minorée), et si $u_n = f(n)$, alors on cherche à majorer (ou à minorer) $f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Cette suite est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée par 0 et 1.

F. Limite d'une suite

1. Définition : Une suite (u_n) est une suite **convergente** vers le nombre réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Le nombre réel l est la limite de la suite (u_n), on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente (sa limite est infinie ou n'existe pas).

2. Technique : si $u_n = f(n)$, alors la limite de la fonction f en $+\infty$ est la limite de la suite (u_n).

3. Théorèmes (de comparaison) : Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si les deux suites convergent, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

<u>Théorème des gendarmes:</u> Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Démonstration du théorème des gendarmes: La suite (u_n) converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_1 . De même, la suite (w_n) converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (w_n) à partir d'un certain rang n_2 . En prenant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang n_0 puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Donc la suite (v_n) converge vers l.

4. Exemples:

- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et cette suite converge vers 1.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $u_{n+1} > u_n$, donc la suite est strictement croissante, minorée par 1 et non majorée. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc la suite est divergente.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{n+1}$. On considère alors les suites (v_n) et (w_n) définies par

$v_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ et $w_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. Alors, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{n+1} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

5. Suites monotones convergentes:

Théorème: Toute suite croissante et majorée converge.

Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque: si la suite (u_n) est croissante et majorée par un réel M, alors la limite de (u_n) est inférieure ou égale à M; cette limite n'es pas nécessairement M.

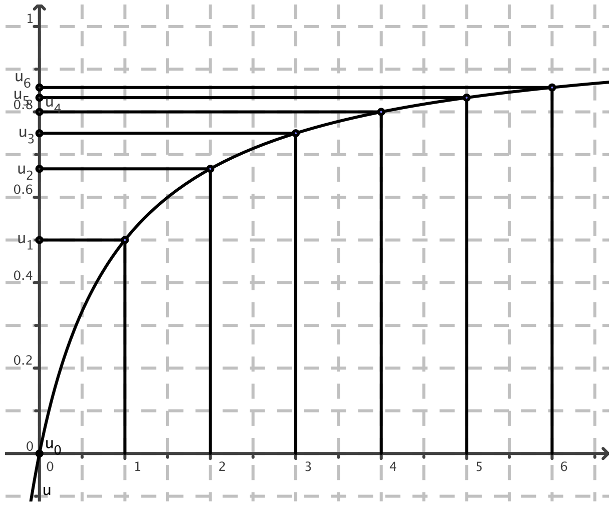
Exemple: La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ et $u_0 = 0$ est croissante et majorée par 2; elle converge donc mais sa limite n'est pas 2 mais le nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (A démontrer !)

Propriétés: Si (u_n) converge vers l, et si (u_n) est croissante, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant l$.

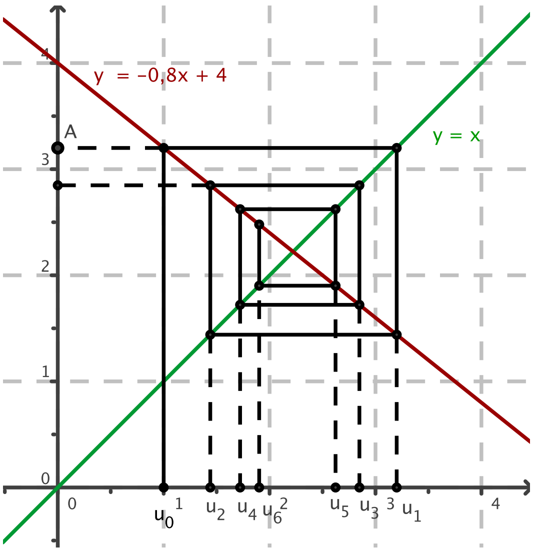
Si (u_n) converge vers l, et si (u_n) est décroissante, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant l$.

G. Représentation graphique d'une suite

Si la suite (u_n) a son terme général défini en fonction de n, on représente la suite dans un repère du plan, par un ensemble de points de coordonnées $(n; u_n)$. Cette représentation graphique permet de visualiser les variations de la suite et éventuellement la convergence.



Exemple: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Les sept premiers termes de la suite sont représentés ci-contre. On peut conjecturer que la suite est strictement croissante et qu'elle converge vers 1.



Si la suite (u_n) est définie par récurrence, de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, on représente la suite dans un repère du plan, en utilisant la représentation graphique de la fonction g et la droite d'équation $y = x$: On place u_0 sur l'axe des abscisses, puis u_1 comme image de u_0 par la fonction g, puis on ramène u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$, puis u_2 comme image de u_1 par la fonction g, puis on ramène u_2 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite d'équation $y = x$, etc...

Exemple: $u_{n+1} = -0{,}8u_n + 4$ et $u_0 = 1$.
Les sept premiers termes de la suite sont représentés ci-contre.
On peut conjecturer que la suite n'est ni croissante, ni décroissante et qu'elle converge vers l, où l est solution de l'équation $-0{,}8x + 4 = x$, soit $l = 20/9$.

H. Suites adjacentes

Définition: On dit que deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ sont adjacentes si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées:

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante;
- Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exemple: $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ sont des suites adjacentes.

Théorème: Si les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration: la suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$; de même la suite (v_n) est décroissante, donc pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc elle converge vers un réel l. La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc elle converge vers un réel l'. La suite $(u_n - v_n)$ converge donc vers $l - l'$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$, donc $l - l' = 0$, et $l = l'$.
De plus, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.

Les deux suites de l'exemple précédent converge vers 1.