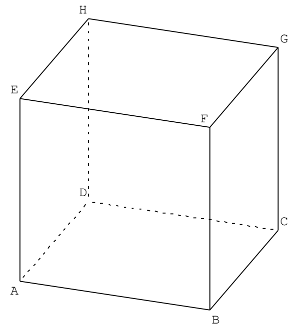
COURS TERMINALE GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

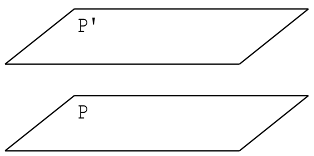
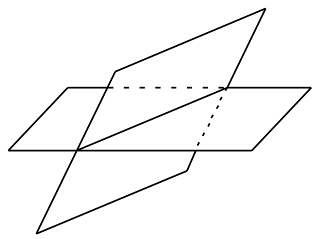
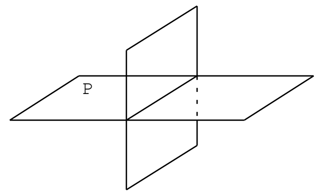
Dans toutes les situations, les exemples sont donnés par rapport à un cube ABCDEFGH (dessin ci-contre).



1. Règles d'incidence :

Trois points non alignés, une droite et un point extérieur à la droite, deux droites sécantes de l'espace, définissent un unique plan.

2. Positions relatives de deux plans :

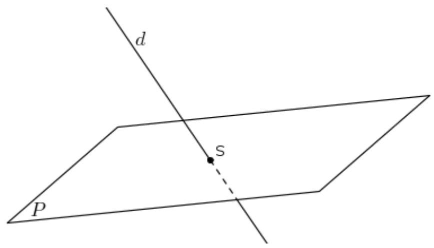
Deux plans de l'espace peuvent être parallèles : ils n'ont aucun point en commun ou ils sont confondus.	Deux plans de l'espace peuvent être sécants : ils se coupent suivant une droite.	Deux plans de l'espace peuvent être perpendiculaires : ils sont sécants et deux droites sécantes de l'un des plan sont perpendiculaires (ou orthogonales) à une droite de l'autre plan.
		

Exemple : les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles ; les plans (ABC) et (ABD) sont confondus; les plans (ABC) et (BCG) sont orthogonaux ou perpendiculaires ; les plans (EBC) et (ABC) sont sécants suivant la droite (BC).

3. Positions relatives d'un plan et d'une droite :

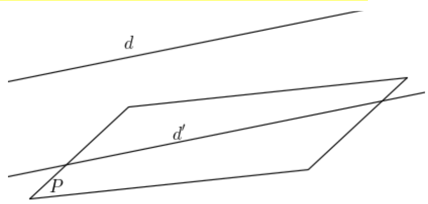
Une droite et un plan de l'espace peuvent être sécants : la droite coupe le plan en un point :

la droite d coupe le plan P en S :



Une droite et un plan de l'espace peuvent être parallèles : la droite est alors parallèle à une droite du plan . *La droite d est parallèle à d' donc à P :*

Une droite peut être contenu dans un plan de l'espace : la droite est incluse dans le plan ; tous les points de la droite sont dans le plan.



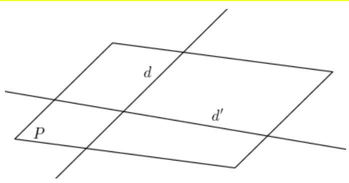
Ci-contre, la droite *d'* est contenu dans le plan *P.* Notation : $d' \subset P$.

Exemple : la droite (AB) coupe le plan (FGC) en B ; la droite (AC) coupe le plan (BFH) en le milieu de [BD] ; la droite (EH) est parallèle au plan (ABC).

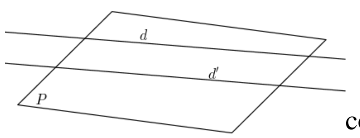
4. Positions relatives de deux droites dans l'espace :

Droites coplanaires : deux droites sont coplanaires si elles sont contenues dans le même plan ; elles peuvent être sécantes ou parallèles.

Les droites d et d' sont sécantes en S :



Les droites d et d' sont parallèles :

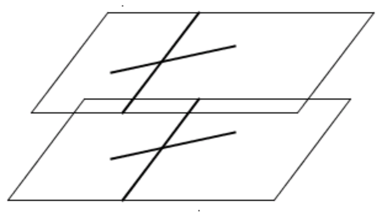


Exemple : les droites (AB) et (AC) sont coplanaires, elles sont dans le plan (ABC). les droites (FB) et (BD) sont coplanaires, elles sont dans le plan (DBF).

Droites non coplanaires : elles ne sont pas contenues dans le même plan ; elles n'ont aucun point d'intersection et elles ne sont pas parallèles. *Exemple* : les droites (AB) et (FG) sont non coplanaires.

5. Parallélisme de droites et de plans:

Propriétés :

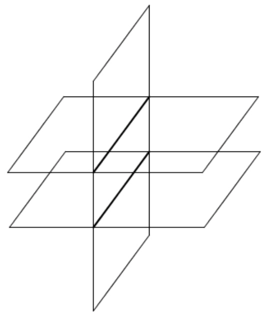


(1) Par un point, il passe un seul plan parallèle à un plan donné.

(2) Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

(3) Si une droite est parallèle à une droite d'un plan P, elle est parallèle à P.

(4) Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre. (figure ci-contre)



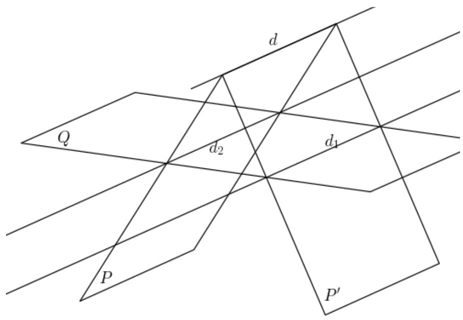
(5) Si une droite (d) est parallèle à un plan P, tout plan sécant à P contenant (d) coupe P selon une droite parallèle à (d).

(6) Si deux plans sécants sont parallèle à une droite (d), leur intersection est parallèle à (d).

(7) Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.

(8 : théorème du toit) Deux plans P et P' se coupent suivant une droite (d). Si un plan Q coupe le plan P suivant une droite (d_1) parallèle à (d), alors le plan Q coupe le plan P' suivant une droite (d_2) parallèle à (d).

ou : Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, leur intersection est une droite parallèle aux deux premières.



Attention : Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas forcément parallèles. (exemple: les droites (AB) et (AC) sont parallèles au plan (EFG) mais elles sont sécantes).

Par un point, il passe plusieurs droites parallèles à un plan donné, il passe plusieurs plans parallèles à une droite donnée.

6. Théorèmes relatifs à l'orthogonalité:

Définition : Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales s'il existe une droite parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.

Propriétés :

(1) Si deux droites sont orthogonale, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

(2) Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

(3) Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

(4) Si deux droites sont parallèles, alors tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

(5) Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

(6) Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite, alors ils sont parallèles.

Toutes les notions de vecteurs vues dans le plan se généralisent, en particulier la notion de colinéarité des vecteurs.

A. Rappels :

1. Propriétés : a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à ABDC est un parallélogramme.

b) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ qui est le vecteur nul.

c) Relation de Chasles : pour tous points A, B, C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

d) Vecteur opposé : $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$; on a $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

e) Pour tout réel *k,* on définit le vecteur $k\vec{u}$ par le vecteur de même direction que $\vec{u}$, de norme $|k|$ fois celle de $\vec{u}$ et de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens opposé si $k < 0$.

e) Vecteurs colinéaires : deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Conséquences : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à : les points A, B et C sont alignés.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à : les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

f) Points particuliers : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) I milieu du segment [AB] ; 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; 3) $\overrightarrow{AI} = ½\,\overrightarrow{AB}$; 4) pour tout point M , on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) G est le centre de gravité du triangle ABC ;

2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;

3) pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

B. Caractérisation vectorielle d'un plan :

1. Définition : On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de l'espace et un point A de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Vecteurs coplanaires

Définition : On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Propriétés : On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

C. Caractérisation vectorielle d'une droite : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur ;
l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k est un réel, est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

D. Les vecteurs dans une base :

1. Repère de l'espace : Un repère de l'espace est formé d'un point O origine du repère et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ non coplanaires de l'espace. Notation : (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Tout vecteur de l'espace s'écrit en fonction des vecteurs ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) ;
tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; les nombres réels x, y et z sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), noté $(x ; y ; z)$.

Le repère est orthogonal si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux ; et le repère est orthonormé si il est orthogonal et si les vecteurs sont de norme 1.

Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels x, y, z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x, y, z sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et les coordonnées du point M dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Notations : $\overrightarrow{OM}\,(x ; y ; z)$ ou $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. Calculs dans un repère :

$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$;

$\vec{u}\,(x ; y; z)$ et $\vec{v}\,(x' ; y'; z')$; alors $\vec{u} + \vec{v}\,(x + x' ; y + y'; z + z')$ et $k\vec{u}\,(kx ; ky ; kz)$;

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

I milieu du segment [AB] : I $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2} \right)$.

3. Représentation paramétrique d'une droite :
On se place dans un repère de l'espace (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).
Soit A(x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace, et $\vec{u}$ (α ; β ; γ) un vecteur de l'espace.
Pour tout point M(x ; y ; z) de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, soit $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$.

Ainsi le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$ avec t dans ℝ, est une représentation paramétrique de la droite (d).

Cette représentation n'est pas unique (le point A n'est pas unique sur la droite (d), et le vecteur directeur n'est pas unique).

4. Propriétés :
a) Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si des vecteurs directeurs de chacune des droites sont colinéaires.
b) Si deux droites de l'espace ne sont pas parallèles, on peut chercher un point d'intersection en résolvant un système :
Soit (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (α ; β ; γ), et (d') la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$ (α' ; β' ; γ').

Si le système $\begin{cases} x_A + \alpha t = x_C + \alpha' t' \\ y_A + \beta t = y_C + \beta' t' \\ z_A + + \gamma t = z_C + \gamma' t' \end{cases}$ a une unique solution d'inconnues t et t', alors les droites sont sécantes et le point d'intersection est déterminer par les valeurs de t et t' trouvées.
Si le système n'a pas de solution, alors les droites sont non coplanaires.

5. Exemple : On considère les deux points A(1 ; – 2 ; 4) et B(– 3 ; 1 ; 2) de l'espace dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; ou $\begin{cases} x = -3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.