A. Notion ensembliste :

1. Définition : on appelle cardinal d'un ensemble E fini d'éléments le nombre d'éléments de cet ensemble ; ce nombre est noté Card(E).

2. Exemples : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} = résultats du lancer d'un dé cubique. Alors Card(E) = 6.
E = notre alphabet {a, b, c, ..., z} ; card(E) = 26.

3. Propriétés :
a) Soient A_1, A_2, ... A_p des ensembles disjoints.
Alors $\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots \text{Card}(A_p)$.
b) Soit A une partie de E ; on note $\overline{A}$ son complémentaire ; alors $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

4. Définition : Soient E et F deux ensembles finis non vides. Le produit cartésien de E par F, noté E×F est l'ensemble des couples $(a\ ;\ b)$ avec $a \in E$ et $b \in F$.
On a Card(E×F) = Card(E)×Card(F).
Exemples : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} et F = {7 ; 8 ; 9 ; 10}. A et F sont bien disjoints,
donc $\text{Card}(E \cup F) = 10$; Card(E×F) = 6×4 = 24.

B. *k*-uplets d'un ensemble fini :

1. Définition : Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide.
Un k – uplet de E (ou k – liste) d'éléments de E est un élément du produit cartésien E×E×...×E (k facteurs).
Exemple : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. {1 ; 1 ; 2} est un 3-uplet ou triplet d'éléments de E.

Théorème : Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $1 \leq k \leq n$ et E un ensemble à n éléments.
Le nombre de k – uplets de E est égal à n^k.
Le nombre de k – uplets d'éléments deux à deux distincts de E est égal à $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.
Définition : On appelle permutation d'un ensemble E à n éléments, tout n – uplet d'éléments deux à deux distincts de E.
Exemples : E = {0 ; 1} ; un octet (composé de 8 bits) est un 8-uplet de E ; $\text{Card}(E^8) = 2^8 = 256$.
$E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$; les permutations de E sont $\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, $\{a\ ;\ c\ ;\ b\}$, $\{b\ ;\ a\ ;\ c\}$, $\{b\ ;\ c\ ;\ a\}$, $\{c\ ;\ b\ ;\ a\}$, $\{c\ ;\ a\ ;\ b\}$.
Théorème : Le nombre de permutations d'un ensemble E non vide à n éléments est égal à $n(n-1)\ldots\times 2\times 1$.
Ce nombre est noté n ! et se lit n factorielle.
Remarque : par convention 0 ! = 1.

C. Partie d'un ensemble et combinaisons :

1. Définition : Soit E un ensemble fini. F est une partie de E signifie que tous les éléments de F sont des éléments de E. On dit aussi que F et une partie de E, ou un sous-ensemble de E. On note $F \subset E$.

2. Théorème : Soit n un entier naturel et E un ensemble à n éléments.
Le nombre de parties de E est égal à 2^n.

Théorème : Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $0 \leq k \leq n$ et E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à $\dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Ce nombre est noté $\dbinom{n}{k}$ (lire (k pari n). Ces nombres sont aussi appelés les coefficients binomiaux.

Exemple : Dans un jeu de 32 cartes, une main est composée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?
Ce sont des parties de 5 éléments distincts des 32 cartes ;
donc il y en a $\dbinom{32}{5} = \dfrac{32!}{27!5!} = \dfrac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1} = 201376$.

Combien y a-t-il de mains contenant l'as de coeur ? $\dbinom{32}{5} = \dfrac{32!}{27!5!} = \dfrac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1} = 31465$.

Il y a $n+1$ coefficients binomiaux : $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n}$.

Propriétés : $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$; $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; $\binom{n}{n} = 1$.

la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ..., + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Relation de Pascal : pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Triangle de Pascal :

La première colonne ne contient que des 1 ; pour les autres termes, un terme est égal à la somme du terme immédiatement au-dessus et de celui qui est à la gauche de ce dernier :

Propriété : le terme de la ligne n et de la colonne k du triangle de Pascal est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

	k=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n= 0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

<u>Exemple de problème de dénombrement :</u>

Une urne contient quatre boules rouges numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules bleues numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule bleue ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?

1. Le nombre de tirages possibles est le nombre de combinaisons de trois boules parmi neuf : $\binom{9}{3} = 84$.

2. Le nombre de tirages contenant trois boules rouges : $\binom{4}{3} = 4$.

Le nombre de tirages contenant trois boules vertes : $\binom{3}{3} = 1$.

Donc le nombre de tirages contenant trois boules de même couleur est $4 + 1 = 5$.

3. Le nombre de tirages sans boules bleues : $\binom{7}{3} = 35$. Donc le nombre de tirages contenant contenant au moins une boule bleue est $84 - 35 = 49$.

4. Il y a cinq boules avec un numéro impair ; le nombre de tirages d'une de ces boules est $\binom{5}{1} = 5$.

Les deux autres boules sont tirées parmi quatre boules, soit $\binom{4}{2} = 6$.

Le nombre de tirages contenant un seul numéro impair est $5 \times 6 = 30$.