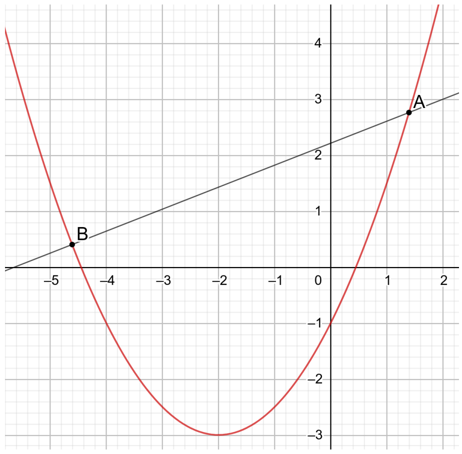
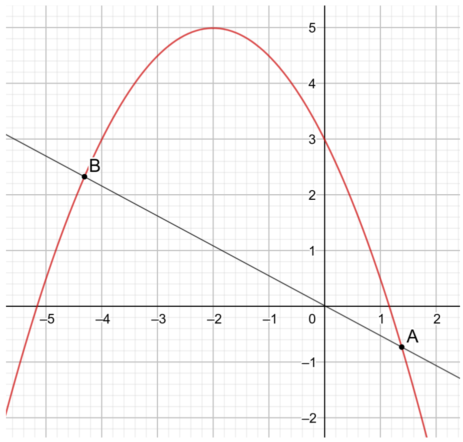
1. Dérivée seconde

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée $f\,'$ est dérivable sur I.
On appelle fonction dérivée seconde de f sur I la dérivée de $f\,'$ notée $f\,''$: $(f\,'(x))' = f\,''(x)$.

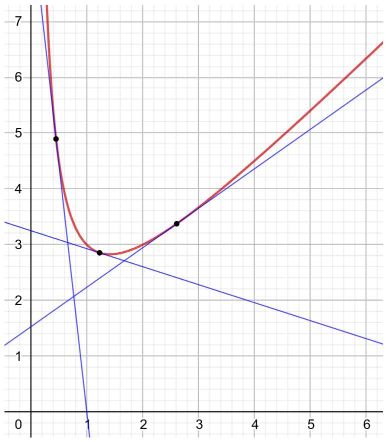
Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x - 3)\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f\,'(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + (4x - 3)(-1)\mathrm{e}^{-x} = (-4x + 7)\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f\,''(x) = (-4)\mathrm{e}^{-x} + (-4x + 7)(-1)\mathrm{e}^{-x} = (4x - 11)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Fonction convexe et fonction concave

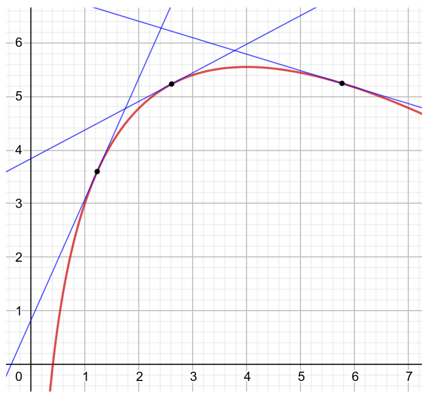
Définitions : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative.

La fonction f est **convexe** sur I si, pour tout réels a et b de I, la portion de la courbe C située entre les points A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$) est entièrement située en dessous de la sécante (AB).	La fonction f est **concave** sur I si, pour tout réels a et b de I, la portion de la courbe C située entre les points A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$) est entièrement située au-dessus de la sécante (AB).
 Fonction convexe	 Fonction concave

Propriétés :
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, la courbe C est située au-dessus de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, la courbe C est située en dessous de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

Propriétés sur les fonctions de référence :
- La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube est est concave sur $]-\infty\ ;0[$ et convexe sur $]0\ ;+\infty[$.
- La fonction inverse est est concave sur $]-\infty\ ;0[$ et convexe sur $]0\ ;+\infty[$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0\ ;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\ ;+\infty[$.

3. Convexité et dérivée seconde :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

Les proposition suivantes sont équivalentes : - La fonction f est convexe sur I ; - f' est croissante sur I ; - pour tout x de I, $f''(x) \geq 0$.	Les proposition suivantes sont équivalentes : - La fonction f est concave sur I ; - f' est décroissante sur I ; - pour tout x de I, $f''(x) \leq 0$.

Démonstration au programme :

- Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :

On considère la fonction g dérivable sur I et définie par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.

Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante sur I.

De plus, $g'(a) = 0$, donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.

On peut donc compléter le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a - a) - f(a) = 0$.

Donc $g(x) \geq 0$ sur I, soit $f(x) \geq f'(a)(x - a) - f(a)$.

On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 3)e^{-x}$. Étudier la convexité de la fonction f.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1e^{-x} + (x + 3)(-1)e^{-x} = (-x - 2)e^{-x}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = (-1)e^{-x} + (-x - 2)(-1)e^{-x} = (x + 1)e^{-x}$ qui est du signe de $x + 1$ puisque pour tout x réel, $e^{-x} > 0$.

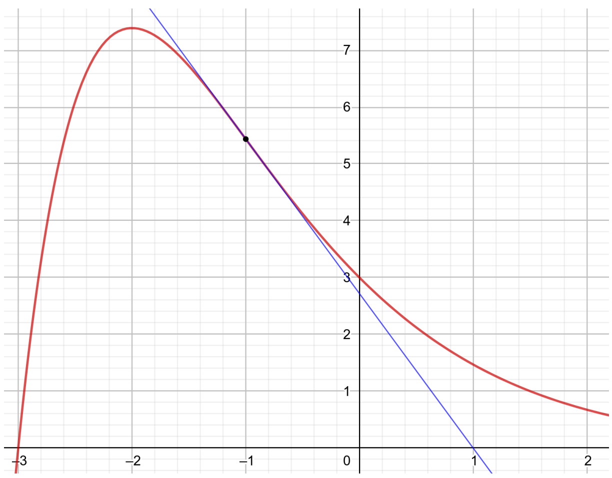
Pour tout $x \leq -1$, $f''(x) \leq 0$ et pour tout $x \geq -1$, $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; -1]$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$.

4. Point d'inflexion

Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

Si $f''(x)$ change de signe en un réel a de I, alors C admet un point d'inflexion d'abscisse a.



Propriété admise : En un point d'inflexion de C, la tangente traverse la courbe.

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple : Soit f la fonction cube $f(x) = x^3$;

$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

La tangente au point O(0 ; 0) est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.

Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Méthode : Rechercher un point d'inflexion :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 3)e^{-x}$. (Vu dans le paragraphe 3).

$f''(x) = (x + 1)e^{-x}$ qui s'annule en $x = -1$ en changeant de signes, donc le point $I(-1 ; 2^{e})$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.