COURS TERMINALE spécialité ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Notion d'équations différentielles :

Une équation différentielle est une égalité reliant une fonction dérivable et sa ou ses dérivées.
Une solution d'une équation différentielle est une fonction dérivable qui vérifie cette égalité.

Exemples :
a) $y' = y$: vous connaissez une solution de cette équation différentielle qui est la fonction exponentielle ; il y en a d'autres : les fonctions définies par $f(x) = ke^x$ où k est un nombre réel sont des solutions de cette équation différentielle.
b) $y'' = -y$: une solution de cette équation différentielle est la fonction cosinus ou la fonction sinus.

2. Équation différentielle $y' = f$ et primitive d'une fonction :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une solution de l'équation différentielle $y' = f$ est une fonction F telle que la dérivée de F soit f. On dit que F est une primitive de la fonction f sur I.

Propriété : toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété : Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et F une primitive de f. Les primitives de f c'est-à-dire toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = f$ sont les fonctions G définies par $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + k$ où k est une constante réelle.

3. Primitives des fonctions de référence :

f	Définie sur	F		f (où u est une fonction dérivable)	Définie sur	F
a constante	$\mathbb{R}$	$ax + b$		$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	D_u	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2}x^2$		$\frac{u'}{u^2}$	$D_u \cap \{u(x) \neq 0\}$	$\frac{-1}{u}$
x^2	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{3}x^3$		$\frac{u'}{u}$	$D_u \cap \{u(x) > 0\}$	$\ln(u)$
x^3	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{4}x^4$		$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$D_u \cap \{u(x) > 0\}$	$\sqrt{u}$
x^n avec $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$		$u'e^u$	D_u	e^u
$\frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$\ln(x)$		$(v' \circ u) \times u'$	$D_u \cap D_v$ et v dérivable sir J avec $u(x) \in$ J	$v \circ u$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$2\sqrt{x}$				
e^x	$\mathbb{R}$	e^x				

4. Primitives et opérations sur les fonctions :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur I. Alors :
F + G est une primitive de $f + g$ sur I ;
Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.
Il n'y a pas de propriété pour le produit ou le quotient de deux fonctions.

5. Unicité de la primitive :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout x_0 de I et tout y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f. telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

6. L'équation différentielle $y' = ay$

Propriété : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \to ke^{ax}$ où k est une constante réelle.

Démonstration : Soit k un réel non nul et la fonction f_k définie par $f_k(x) = ke^{ax}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $f_k\,'(x) = kae^{ax}$.
Cette fonction est bien solution de l'équation $f\,' = af$.
Montrons que les fonctions f_k sont les seules solutions de l'équation différentielle :
Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation $f\,' = af$.
Soit h la fonction définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$,
et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} + g(x)(-ae^{-ax}) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$ Comme g est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on obtient $h'(x) = 0$, donc h est une fonction constante $= k$.
Donc $h(x) = g(x)e^{-ax} = k$ d'où $g(x) = ke^{ax}$.

Remarque :
Si f et g sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ alors $f + g$ et cf sont solutions de la même équation différentielle où c est une constante réelle.
Exemple : Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions $x \to ke^{3x}$ où k est une constante réelle.

7. L'équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \to ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est une constante réelle.
Propriété : Pour tout x_0 et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y' = ay + b$ telle que $f(x_0) = y_0$.
Exemple : Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - 1$ sont les fonctions $x \to ke^{2x} + \dfrac{1}{2}$ où k est une constante réelle.
Soient $x_0 = 4$ et $y_0 = -2$; il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = 2y - 1$ telle que $f(4) = -2$:
$f(x) = ke^{2x} + \dfrac{1}{2}$ et $f(4) = ke^{8} + \dfrac{1}{2} = -2$ d'où $ke^{8} = \dfrac{-5}{2}$ d'où $k = \dfrac{-5}{2e^{8}} = \dfrac{-5e^{-8}}{2}$;
donc $f(x) = \dfrac{-5e^{-8}}{2}e^{2x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-5e^{2x-8}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{-5e^{2x-8}+1}{2}$.

8. L'équation différentielle $y' = ay + f$:

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E).
Alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \to ke^{ax} + g(x)$ où k est une constante réelle.

Exemple : Soit (E) l'équation différentielle $y' = 4y + 3x - 1$.
a) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{1}{16}$ est solution de l'équation (E).
b) En déduire toutes les solutions de (E).
Solution : a) $g'(x) = \dfrac{-3}{4}$; et $4g(x) + 3x - 1 = 4(\dfrac{-3}{4}x + \dfrac{1}{16}) + 3x - 1 = -3x + \dfrac{1}{4} + 3x - 1 = \dfrac{-3}{4}$;
donc g est solution de (E).

b) Les solutions de (E) sont les fonctions f_k définie par $f_k(x) = ke^{4x} + g(x) = ke^{4x} + \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{1}{16}$.