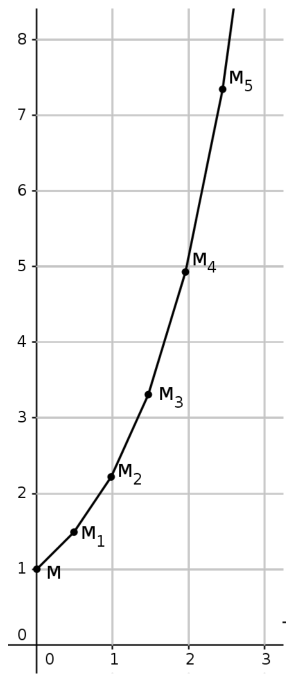
COURS TERMINALE spécialité LA FONCTION EXPONENTIELLE

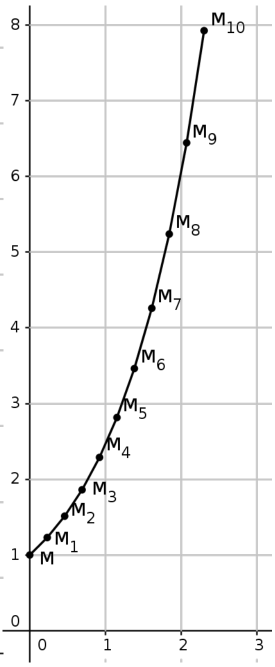
1. Approximation d'une courbe par la méthode d'Euler

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I, et C sa courbe représentative dans un repère du plan.
On suppose connu un point M(x_0 ; y_0) de la courbe C. On sait que pour h non nul proche de 0, l'approximation affine de la fonction f donne : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$. Soit $x_1 = x_0 + h$ et $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0) = y_0 + hf'(x_0)$.
On obtient un point M_1 (x_1 ; y_1) .
Soit $x_2 = x_1 + h$ et $y_2 = f(x_1) + hf'(x_1) = y_1 + hf'(x_1)$. On obtient un point M_2 (x_2 ; y_2), et ainsi de suite.
On trace alors les segments [MM_1], [$M_1 M_2$], [$M_2 M_3$], etc... qui donne une approximation de la courbe C représentative de f. Plus h est proche de 0 et plus l'approximation est bonne.

2. L'équation différentielle $f' = kf$

a) Résultat préliminaire : On considère une fonction f dérivable sur ℝ et un nombre réel k tels que, pour tout réel x , $f'(x) = kf(x)$ et $f(0) = 1$. Alors la fonction f ne s'annule pas sur ℝ.
Démonstration : On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) f(-x)$. Cette fonction g est dérivable sur comme produit et composée de fonctions dérivables sur ℝ.
On a $g'(x) = f'(x) f(-x) + f(x) (-f'(-x)) =$
$kf(x) f(-x) + f(x) (-kf(-x)) = 0$.
Donc la fonction g est constante sur ℝ égale à $g(0) = f(0) f(0) = 1^2 = 1$.
Donc, pour tout réel x, $g(x) = f(x) f(-x) = 1$, et $f(x) \neq 0$.





b) Étude de l'équation $f' = f$.
Théorème : il existe une unique fonction f dérivable sur telle que
$f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction s'appelle la fonction exponentielle, notée exp.
Démonstration : L'existence de la fonction est conjecturée par la méthode d'Euler qui permet de construire une courbe solution de l'équation différentielle $f' = f$ (voir figures ci-contre).
On peut toutefois démontré l'unicité:
on considère la fonction g solution de l'équation différentielle $f' = f$ et tel que $g(0) = 1$. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.
Cette fonction h est dérivable sur ℝ comme quotient de fonctions dérivables sur ℝ et $f(x) \neq 0$ d'après b) i).
On a $h'(x) = \dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2} = \dfrac{g(x)f(x)-g(x)f(x)}{f(x)^2} = 0$.
Donc la fonction h est constante sur ℝ égale à $h(0) = 1$.
Ainsi, pour tout réel x, $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ et donc $g(x) = f(x)$. La fonction exp est donc unique.

c) Etude de l'équation $f' = kf$.
Théorème : il existe une unique fonction f dérivable sur telle que $f' = kf$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est définie sur par $\exp(kx)$.
Démonstration : Existence: En prenant $f(x) = \exp(kx)$, cette fonction est dérivable sur ℝ, comme composée de fonctions dérivables sur ℝ et $f(0) = \exp(0) = 1$. Et $f'(x) = k \exp(kx)$ (en utilisant la dérivée des fonctions composées: $(uov)'(x) = u'(v(x))\, v'(x)$). Cette fonction est bien solution de l'équation $f' = kf$ et $f(0) = 1$.

Unicité: Démonstration similaire à celle de la partie 2 en considérant une fonction g solution de l'équation différentielle $f' = kf$ et telle que $g(0) = 1$ et la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

3. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1: La fonction exponentielle transforme une somme en produit:

Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

Démonstration : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ pour y réel fixé. (On sait que $\exp(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$).

La fonction g est dérivable sur et $g'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\times\exp(x)-\exp(x+y)\times\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$; donc la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$, et égale à $g(0) = \exp(y)$. D'où $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$.

Ainsi, pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

Propriété 2: En prenant $y = -x$, il vient $\exp(x + y) = \exp(x - x) = \exp(x) \exp(-x)$, donc $1 = \exp(x) \exp(-x)$ et ainsi $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Propriété 3: De plus, $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \exp(-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Notation : La fonction exponentielle a les mêmes propriétés que celles portant sur les puissances entières.

On décide de noter $\exp(x) = e^x$.

La calculatrice nous donne $\exp(1) = e \simeq 2{,}7182821828...$

Résumé : Pour tous réels x et y, et tout entier relatif n :

$e^0 = 1$ $\quad$ $e^x > 0$

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad$ $(e^x)^n = e^{xn}$

$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

4. Étude de la fonction exponentielle

a) Variations: D'après l'étude précédente, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$. D'après le paragraphe b)i), la fonction ne s'annule pas, et étant continue puisque dérivable, elle ne change pas de signe; de plus comme $\exp(0) = 1$, elle est toujours positive, donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	1	$+\infty$

b) Limites: Propriétés: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration: Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $g'(x) = e^x - 1$ qui est positive sur $[0; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 0]$. La fonction g admet donc un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = 1$. Donc pour tout réel x, $g(x) \geqslant 1$; ainsi, $e^x - x \geqslant 1$ et $e^x \geqslant x + 1$.

En utilisant un théorème sur les comparaisons de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ et $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$. Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$, donc e^{-x} tend vers $+\infty$, et $\dfrac{1}{e^{-x}}$ tend vers 0. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

c) Approximation affine de e^h pour h proche de 0:

L'approximation affine de e^h pour h proche de 0 est donnée par $e^h = e^0 + h \exp'(0) = 1 + h$.

d) Représentation graphique de la fonction exponentielle:

Tangentes à la courbe représentative de exp:

Au point d'abscisse 0: l'équation de la tangente est
$y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$.

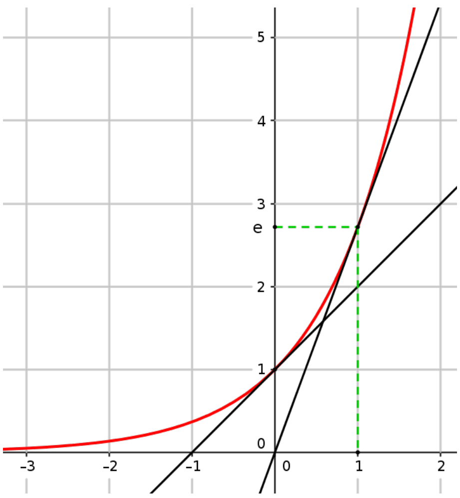
Au point d'abscisse 1: l'équation de la tangente est
$y = \exp'(1)(x - 1) + \exp(1) = ex - e + e = ex$.

Cette tangente passe par l'origine du repère.

Position de la courbe par rapport à ces tangentes:

Il s'agit de montrer que la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes.

Pour cela, considérons l'équation de la tangente T à la courbe C de la fonction exponentielle au point d'abscisse a :
$y = \exp'(a)(x - a) + \exp(a) = e^a (x - a + 1)$.



Pour étudier la position de C par rapport à T, il suffit d'étudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^a (x - a + 1)$.
Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur et
$f'(x) = e^x - e^a$. Cette dérivée s'annule en $x = a$ et comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f est décroissante sur $]-\infty\,;\, a]$ et croissante sur $[a; +\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = a$ qui vaut $f(a) = e^a - e^a (a - a + 1). = 0$. Donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout réel x , $e^x \geqslant e^a (x - a + 1)$.
Donc la courbe C est toujours au-dessus des tangentes T.
Une telle fonction est appelée une fonction convexe.

4. Dérivée de e^u où u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u'\,e^u$. Il suffit d'utiliser la formule de dérivation des fonctions composées : $(v \circ u(x))' = (v'(u(x))\, u'(x)$.

Exemple: Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x) = \exp(x^2 - 2x) = e^{x^2-2x}$.
Cette fonction est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = (2x - 2)\ e^{x^2-2x}$. On sait que, pour tout réel x, e^x est strictement positif, donc $e^{x^2-2x} > 0$. Le signe de la dérivée est donné par le signe de $2x - 2$ qui s'annule en $x = 1$.
D'où le tableau de variations de cette fonction :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	e^{-1}	↗ $+\infty$

5. Quelques limites à connaître:

Propriétés: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration: a) On a vu en d) ii) que pour tout réel x , $e^x \geqslant x + 1 > x$.
D'où, pour $x > 0$, $e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$.
Pour $x > 0$, on élève au carré : $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2$ qui donne $e^x > \frac{x^2}{4}$, d'où $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$. En utilisant un théorème sur les comparaisons de limites, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{4} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
b) Posons $X = -x$; lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} -X\,e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{-X}{e^X} = 0$ d'après le a).
c) On utilise le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (e^0)' = 1$.