1. Notion de bijection

On considère une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I (bornée ou non). Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que pour tout réel y dans $f(\mathrm{I})$, il existe un unique réel x de I tel que $f(x) = y$.
On dit alors que f réalise une bijection de I dans $f(\mathrm{I})$.
On admet qu'il existe alors une fonction réciproque de f , notée f^{-1} telle que pour tout y de $f(\mathrm{I})$, $f^{-1}(y) = x$.
La composée de f et de f^{-1} donne la fonction identité qui à x associe x :
pour tout réel x de I, $f^{-1} \circ f(x) = x$, et pour tout réel x de $f(\mathrm{I})$, $f \circ f^{-1}(x) = x$.

2. La fonction logarithme népérien

Définition: La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'équation $\exp(x) = y$ où y est un réel strictement positif admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
Il existe une fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $y > 0$, associe l'unique réel x tel que $\exp(x) = y$.
Cette fonction est appelée fonction logarithme népérien, notée ln.
On a donc pour tout réel x, $\ln(\exp(x)) = x$, ou $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
De plus, pour tout réel x strictement positif, $\exp(\ln(x)) = x$, ou $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.
Autrement dit, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = y$ équivaut à pour tout réel y strictement positif, $\ln(y) = x$.
On dit que ln est la bijection réciproque de exp.
La fonction ln est définie sur $]0; +\infty[$.

Propriétés 1: $\ln(1) = 0$; $\ln(\mathrm{e}) = 1$; $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$. Ceci découle de $\mathrm{e}^0 = 1$; $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$; $\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Propriétés 2: Pour tous réels a et b strictement positifs:
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$; la fonction ln transforme un produit en une somme.
$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$; la fonction ln transforme un inverse en un opposé.
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$; la fonction ln transforme un quotient en une différence.

Pour tout entier naturel n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$; $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Démonstration: On utilise un résultat qui sera démontré dans la partie C: la dérivée de ln est la fonction inverse.
Pour un réel $a > 0$, considérons la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax) - \ln(x)$;
elle est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Et $f'(x) = a\frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$.
Donc la fonction f est constante égale à $f(1) = \ln(a)$, donc $\ln(ax) - \ln(x) = \ln(a)$, soit $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.
Cette relation étant vraie pour tout réel $a > 0$, on obtient que pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

En prenant $a = \frac{1}{b}$, la première égalité donne $\ln(1) = \ln\frac{1}{b} - \ln(b)$ et puisque $\ln 1 = 0$,
il vient $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\frac{1}{b} = \ln(a) - \ln(b)$.

Et pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = \ln(a\times a\times a \ldots) = \ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a) = n\ln(a)$.

Pour tout réel $a > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$, donc $\ln((\sqrt{a})^2) = \ln(a)$, soit $2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$, et donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

3. Étude de la fonction logarithme népérien

a) Fonction dérivée

Théorème : La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln(x)' = \dfrac{1}{x}$.

Démonstration: On sait que pour tout réel x, $\exp(\ln(x)) = x$.
En dérivant cette expression, on trouve $\exp'(\ln(x)) \times \ln'(x) = 1$, et comme $\exp' = \exp$,
alors $\exp(\ln(x)) \times \ln'(x) = 1$.

De plus, $\exp(\ln(x)) = x$, ainsi $x \times \ln'(x) = 1$, d'où $\ln(x)' = \dfrac{1}{x}$.

Donc pour tout $x > 0$, la dérivée de ln est strictement positive et la fonction ln est strictement croissante.
Remarque: La fonction ln est donc continue, puisque dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln a = \ln b$ entraîne $a = b$; et $\ln a > \ln b$ entraîne $a > b$.
De plus, pour $a > 1$, $\ln(a) > 0$ et pour $0 < a < 1$, $\ln(a) < 0$.

ii) Limites aux bornes

Théorème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Démonstration : Soit M un réel. La fonction ln étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$,
pour $x > e^{M}$, $\ln(x) > \ln(e^{M}) = M$. Donc $\ln(x)$ est aussi grand que l'on veut, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

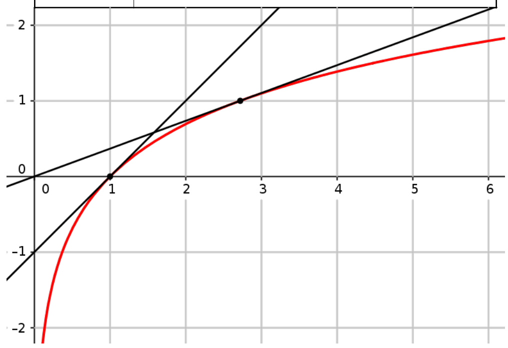
En prenant $X = \dfrac{1}{x}$, soit $x = \dfrac{1}{X}$, lorsque x tend vers 0^{+}, $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln(X)) = -\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty$.

Tableau de variations:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	||	+	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗ 0	$+\infty$

iii) Représentation graphique



Quelques tangentes remarquables:
La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y = 1(x-1) + \ln 1 = x - 1$.
La tangente au point d'abscisse e a pour équation :

$y = \dfrac{1}{e}(x - e) + \ln e = \dfrac{x}{e} - 1 + 1 = \dfrac{x}{e}$.

Cette tangente passe par l'origine du repère.
Propriété: Les courbes des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

iv) Des limites à connaître

Théorème: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration: On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$. Cette fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 4$, elle est négative sur $]0; 4]$ et positive sur $[4; +\infty[$. La fonction f admet un minimum pour $x = 4$ égal à
$f(4) = 2 - 2\ln 2 > 0$. Donc, pour $x > 1$, $f(x) > 0$, donc $\sqrt{x} > \ln(x)$. En divisant chaque membre par x,
on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{\ln(x)}{x} > 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, alors par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, soit $x = \dfrac{1}{X}$, lorsque x tend vers 0^{+}, $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{-\ln(X)}{X} = 0$ par la propriété précédente.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} = 1 =$ le nombre dérivée de la fonction $x \to \ln(x+1)$ en 0, soit $\dfrac{1}{0+1} = 1$.

d) La fonction ln o u

i) Dérivée de ln(u) .

On considère une fonction u strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction composée ln(u) est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple : Le polynôme P défini par $P(x) = x^2 + x + 1$ et strictement positif sur ℝ, donc ln(P(x)) est dérivable sur ℝ et $\ln(P(x))' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Remarque : les variations de la fonction ln(u) sont celles de la fonction u, car la dérivée de ln(u) a le même signe que u'.

ii) Équations et inéquations

La fonction ln étant une bijection croissante de $]0; +\infty[$ dans ℝ, pour tous réels a et b de $]0; +\infty[$,
$\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$; et $\ln a < \ln b$ équivaut à $a < b$.
On peut alors résoudre des équations et des inéquations.

Exemples : a) Résoudre l'équation $\ln(2x - 3) = \ln(x^2 - x - 1)$.
Cette équation est valide si et seulement si $2x - 3 > 0$ et $x^2 - x - 1 > 0$.
La première inéquation donne $x > \dfrac{3}{2}$ et la deuxième donne $x \in]-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty[$,
soit $]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty[$.
L'équation $\ln(2x - 3) = \ln(x^2 - x - 1)$ équivaut alors à $2x - 3 = x^2 - x - 1$, qui s'écrit $x^2 - 3x + 2 = 0$.
Les solutions de cette équation sont 1 et 2. Or $1 \notin]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty[$, donc l'unique solution de $\ln(2x - 3) = \ln(x^2 - x - 1)$ est 2.

b) Résoudre l'inéquation $\ln(2x - 3) \leq \ln(x - 1)$.
Cette inéquation est valide si et seulement si $2x - 3 > 0$ et $x - 1 > 0$.
La première inéquation donne $x > \dfrac{3}{2}$ et la deuxième donne $x > 1$, soit $x > \dfrac{3}{2}$.
L'inéquation $\ln(2x - 3) \leq \ln(x - 1)$ équivaut alors à $2x - 3 \leq x - 1$, équivaut à $x \leq 2$. Donc les solutions de cette inéquation sont les réels $x \in]\dfrac{3}{2} ; 2]$.