A. Loi de Bernoulli.

1. Définition : On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire qui a deux issues possibles appelées succès et échec, noté S et E.
Cette expérience modélise un jeu de pile ou face, où le succès est l'événement : S = « obtenir face », par exemple.

2. Définition : Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec dans une épreuve de Bernoulli, et p la probabilité du succès, c'est-à-dire que $P(X = 1) = p(S) = p$.
Alors on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p. On note $X \sim B(p)$.
Ainsi la loi de Bernoulli de paramètre p est donnée par le tableau ci-contre :

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

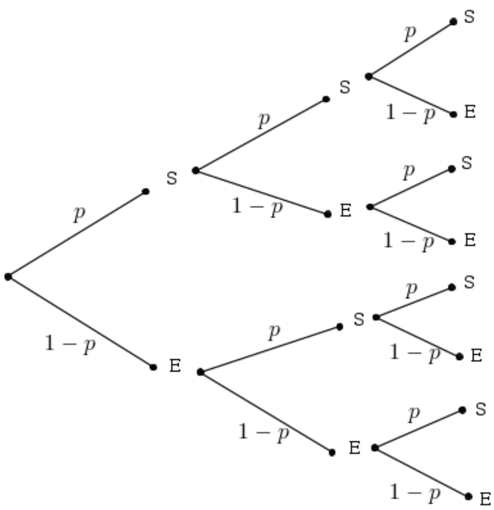
3. Propriété : Si $X \sim B(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.
Démonstration : En exercice.
Remarque : $X^2 = X$ donc $E(X) = E(X^2)$.

B. Loi binomiale.

1. Schéma de Bernoulli (Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes) :
On répète plusieurs fois une même épreuve de Bernoulli. On lance par exemple plusieurs fois une pièce dans un jeu de pile ou face et on compte le nombre de succès.

La réalisation d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit alors que ces épreuves sont indépendantes.

Pour comprendre la structure d'un schéma de Bernoulli, on peut réaliser un arbre pondéré comme ci-contre :



2. Coefficient binomiaux
On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves et k un entier naturel compris entre 0 et n.

Le coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$ (lire k parmi n) est le nombre de branches de l'arbre pondéré ci-dessus contenant k succès.

Il y a $n + 1$ coefficients binomiaux : $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n}$.

Propriétés : $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$;

la somme des coefficients binomiaux $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ..., + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Relation de Pascal : pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Triangle de Pascal :
La première colonne ne contient que des 1 ; pour les autres termes, un terme est égal à la somme du terme immédiatement au-dessus et de celui qui est à la gauche de ce dernier :

	k=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n= 0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Propriété : le terme de la ligne n et de la colonne k du triangle de Pascal est égal au coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

3. Loi binomiale

Définition : On répète n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) une même épreuve de Bernoulli de paramètre p dans des conditions d'indépendance. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n épreuves.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p. On note $X \sim B(n, p)$.
Remarque : Ainsi $X \sim B(p)$ signifie la même chose que $X \sim B(1, p)$.

Propriété : Si $X \sim B(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Démonstration : On note X_1 , X_2 ,. . ., X_n les n variables aléatoires suivant la même loi $B(p)$.
On note alors $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire qui compte le nombre de succès parmi les n épreuves. On utilise la propriété de linéarité de l'espérance pour des sommes de variables aléatoires.
Pour la variance, il y a aussi linéarité lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, d'où le résultat.

Propriété : Soit $X \sim B(n, p)$, alors la loi de X est donnée par : pour tout entier k compris entre 0 et n,
$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration : On dresse un arbre pondéré. L'événement « $X = k$ » signifie qu'il y a eu k succès et donc $(n - k)$ échecs. Chaque branche de l'arbre pondéré donnant $X = k$ a pour probabilité $p^k (1 - p)^{n-k}$.
Il y a $\binom{n}{k}$ branches avec k succès et $(n - k)$ échecs, d'où le résultat.
On vérifie que la somme des $P(X = k)$ de $k = 0$ à n vaut bien 1 grâce à la « formule du binôme ».

Utilisation de la calculatrice :

<table>
<tr><td colspan="2">T.I.</td><td colspan="2">Casio</td></tr>
<tr><td colspan="2">Touche distrib (2nde var)</td><td colspan="2">Menu Exe-Mat
Touche OPTN → STAT → DIST → BINOMIAL</td></tr>
<tr><td>Calculer p(X = k) :</td><td>Calculer p(X = k) :</td><td>Calculer p(X = k) :</td><td>Calculer p(X = k) :</td></tr>
<tr><td>Choisir BinomFdp
nbreEssais : n
p : p
valeur de x : k
Coller</td><td>Choisir BinomFRép
nbreEssais : n
p : p
valeur de x : k
Coller</td><td>Choisir Bpd
BinomialPD(k, n, p)</td><td>Choisir Bcd
BinomialCD(k, n, p)</td></tr>
</table>

Exemple: On lance 5 fois de suite un dé à six faces. Si X est le nombre de 6 obtenus, alors X sui une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$, puisque l'expérience est la répétition de 5 épreuves de Bernoulli de manière identique et indépendante.

1. Calcul de la probabilité d'obtenir :

a. cinq fois un six : $p(X = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0{,}402$.

b. au moins une fois un six : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 \simeq 0{,}598$.

c. exactement trois fois un six : $p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 0{,}032$.

d. au moins trois fois un six : $p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) \simeq 0{,}964$.

2. En moyenne, combien obtient-on de six sur cinq lancers : $E(X) = np = \frac{5}{6}$.

3. a. Combien faudrait-il de lancers pour avoir en moyenne 5 six ?

On cherche n tel que $E(X) = n\dfrac{1}{6} = 5$, soit $n = 30$. Il faudrait 30 lancers.

b. Dans ce cas quelle serait la probabilité d'obtenir cinq fois un six : $p(X = 5) = \dbinom{30}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^5\left(\dfrac{5}{6}\right)^{25} \simeq 0{,}192$.

4. On lance maintenant n fois le dé. Combien faut-il au minimum de lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieur à 0,999.

On cherche la plus petite valeur de n tel que $p(X \geq 1) \geq 0{,}999$, soit $1 - p(X = 0) \geq 0{,}999$,

soit $p(X = 0) \leq 0{,}001$, soit $\dbinom{n}{0}\left(\dfrac{1}{6}\right)^0\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}001$, soit $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}001$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{37} = 0{,}0012$ et $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{38} = 0{,}00098$; donc $n = 38$.