On définit, sur une expérience aléatoire, une **loi de probabilité** P qui à une issue e_i associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1 et telle que la somme de tous les p_i soit égale à 1. On dit que la probabilité d'obtenir l'issue e_i est le nombre p_i . On note $P(\{e_i\}) = p_i$.
Si, à chaque issue e_i de l'expérience aléatoire, on associe un réel x_i, on définit alors une variable aléatoire X, qui à e_i associe x_i .
La variable aléatoire X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i .
On note : $P(\{X = x_i\}) = p_i$. On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité P' , appelé loi de la variable aléatoire X.
On définit alors : **L'espérance mathématique** de X, notée E(X), comme la moyenne pondérée des x_i affectés des coefficients p_i : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$.

La variance de X, notée V(X), comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des x_i :
$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2$.

L'écart-type de X , noté s(X), comme la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires sur la même expérience et un réel a ; on a
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
$E(aX) = Ae(x)$.

Variables aléatoires indépendantes :
Définition: Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers . X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, et Y prend les valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$.On dit que X et Y sont indépendantes si pour tous i et j $(1 \leq i \leq n$ et $1 \leq i \leq m)$, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Exemple: On considère deux sacs contenant des jetons numérotés; dans le sac n° 1, les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4 et dans le sac n° 2, les jetons portent les numéros 3, 4, 5 et 6.
L'expérience consiste à tirer un jeton de chaque sac.
1. La variable aléatoire X est égale à la somme des numéros des deux jetons tirés et la variable aléatoire Y est égale au produit des numéros des deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X et la loi de la variable aléatoire Y.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X et de Y.

Corrigé :
a) La variable aléatoire X prend les valeurs {4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10} ; la probabilité p(X = 4) = p(tirer le jeton numéroté 1 du sac n° 1 et tirer le jeton numéroté 3 du sac n° 2) = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; ainsi de suite ;
on obtient la loi de probabilité de X :

x_i	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

L'espérance mathématique de X est égale à
$$E(X) = 4\times\frac{1}{16} + 5\times\frac{2}{16} + 6\times\frac{3}{16} + 7\times\frac{4}{16} + 8\times\frac{3}{16} + 9\times\frac{2}{16} + 10\times\frac{1}{16} = \frac{112}{16} = 7.$$

La variable aléatoire Y prend les valeurs {3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24} ;
la probabilité p(Y = 3) = p(tirer le jeton numéroté 1 du sac n° 1 et tirer le jeton numéroté 3 du sac n° 2) =
$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$; ainsi de suite ;
on obtient la loi de probabilité de X :

y_i	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

On peut vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1.
L'espérance mathématique de Y est égale à

$$E(Y) = 3\times \frac{1}{16} + 4\times \frac{1}{16} + 5\times \frac{1}{16} + 6\times \frac{2}{16} + 8\times \frac{1}{16} + 9\times \frac{1}{16} + 10\times \frac{1}{16} + ... + 24\times \frac{1}{16} = \frac{180}{16} = 11{,}25.$$