A. Généralités : le but de ce chapitre est de modéliser les résultats d'une expérience aléatoire ; cette expérience aléatoire comporte un nombre fini **d'issues** ; on désigne par Ω l'ensemble des issues de cette expérience aléatoire, et on l'appelle **l'univers** ; si les issues sont notées e_i, pour i allant de 1 à n,
on a $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Le nombre n d'issues est le **cardinal** de l'ensemble Ω, noté card(Ω) $= n$.
Un **événement** A est une partie de Ω ; il est donc constitué d'un certain nombre d'issues de Ω ; le nombre d'éléments de A est son cardinal, noté card(A).
L'événement **complémentaire** de A, ou événement **contraire** de A, noté $\bar{A}$, est l'événement contenant tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
Un événement **élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue (à un seul élément e_i).
L'événement Ω est l'événement **certain**.
L'événement $\varnothing$ (ensemble vide) est l'événement **impossible**.
Soient A et B deux événements :
$A \cup B$ est l'événement constitué des éléments de A ou des éléments de B (lire : A union B);
$A \cap B$ est l'événement contenant les éléments qui sont à la fois dans A et dans B (lire A inter B).
Les événements A et B sont **disjoints**, ou **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. Les événements A et B n'ont aucun élément en commun.

Premier exemple: on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. L'événement A est « tirer une carte rouge »; l'événement B est « tirer un roi » et l'événement C est « tirer un trèfle ».
L'univers contient les 32 cartes du jeu. Card(Ω) = 32. Card(A) = 16, Card(B) = 4 et Card(C) = 8.
$A \cap B$ est l'événement « tirer un roi rouge »; Card($A \cap B$) = 2.
$A \cup B$ est l'événement « tirer un roi ou une carte rouge »; Card($A \cup B$) = 18.
On remarque que Card($A \cup B$) = Card(A) + Card(B) − Card($A \cap B$).
Les événements A et C sont disjoints. $B \cap C$ est l'événement « tirer un roi de trèfle »; Card($B \cap C$) = 1.
$B \cup C$ est l'événement « tirer un roi ou un trèfle »; Card($B \cup C$) = 11.

B. Probabilité d'un événement : On définit, sur cette expérience aléatoire, une **loi de probabilité** P qui à une issue e_i associe un nombre réel p_i compris entre 0 et 1 et telle que la somme de tous les p_i soit égale à 1. On dit que la probabilité d'obtenir l'issue e_i est le nombre p_i. On note $P(\{e_i\}) = p_i$.
La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des p_i pour tous les éléments e_i de A.
Exemple : Si $A = \{e_1, e_2, e_4\}$ alors $P(A) = p_1 + p_2 + p_4$.

Premier exemple: on tire une carte d'un jeu de 32 cartes. L'événement A est « tirer une carte rouge »; l'événement B est « tirer un roi » et l'événement C est « tirer un trèfle ».
$p(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $p(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Propriétés des probabilités : $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$; pour tout événement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$;
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; si A et B sont disjoints, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
Cas de l'équiprobabilité : si tous les événements élémentaires $\{e_i\}$ ont la même probabilité, qui est dans ce cas $P(\{e_i\}) = \frac{1}{Card(\Omega)}$, alors $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Suite de l'exemple: On est dans le cas de l'équiprobabilité : $P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{16}$.
$P(A \cup B) = \frac{Card(A \cup B)}{Card(\Omega)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$. On a bien $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(B \cap C) = \frac{1}{32}$. $P(B \cup C) = \frac{11}{32}$.

Deuxième exemple: On lance un dé cubique équilibré deux fois. On note les événements :
A : « on obtient un 6 la première fois »;
B : « on obtient un 6 la deuxième fois ».
Réaliser un arbre de probabilités.
Calculer la probabilité des événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{B} \cap A$.

Troisième exemple: On lance deux dés cubiques équilibrés. On note les événements :
A : « la somme des résultats est supérieure ou égale à 10 »;
B : « la somme des résultats est un nombre pair »;
C : « la somme des résultats est un multiple de 5 ».
Calculer la probabilité des événements A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$.

C. Probabilités conditionnelles :

1. Définition et propriétés :

Définition : Soit A un événement de l'univers tel que $P(A) \neq 0$. On définit sur une nouvelle probabilité, notée P_A , telle que pour tout événement B, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Cette probabilité P_A est appelée la probabilité conditionnelle sachant que A est réalisé. On note aussi $P_A(B) = P(B/A)$ (Probabilité de B sachant A).
Remarque : On a donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.
Exemple : On tire au hasard deux boules successivement et sans remise d'une urne contenant 4 boules bleues et 3 boules jaunes. Quelle est la probabilité de tirer deux boules jaunes ?
Notons A l'événement: «tirer une boule jaune en premier» et B l'événement: «tirer une boule jaune en second ».
On cherche $P(A \cap B)$. On sait que $P(A) = \frac{3}{7}$. Pour la deuxième boule, on cherche $P_A(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ puisqu'il ne reste que 6 boules dans l'urne et 2 jaunes. Ainsi $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$.

Propriétés: a) Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
Alors $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.
b) Soient A, B et C trois événements tels que $P(A) \neq 0$. Si A et B sont disjoints (ou incompatibles), alors $P_A(B) = 0$. Si C est contenu dans B (ou inclus dans B), noté $C \subset B$, alors $P_A(C) \leq P_A(B)$.
$P_A(B \cup C) = PA(B) + PA(C) - P_A(B \cap C)$. $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

2. Formule des probabilités totales

a) Notion de partition : On dit que les événements $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ forment une partition de l'univers, si l'intersection des événements pris deux à deux est vide et si la réunion de tous ces événements est l'univers .
Exemple: = Résultats du lancer d'un dé cubique = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Les événements $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5\}$ et $A_3 = \{6\}$ forment une partition de Ω.
Théorème : Soient $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, n événements de probabilité non nulle formant une partition de Ω.
Alors, pour tout événement B, $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) =$
$P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + P_{A_3}(B) \times P(A_3) + ... + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$.
Démonstration : En fait, les événements ($A_n \cap B$) forment une partition de Ω, et
$B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n)$, d'où $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$.
Donc $P(B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)) =$
$P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$.
Remarque: Si A n'est pas vide, les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω.
Ainsi, pour tout événement B, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Exemple: Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie Ma. Parmi les individus atteints de la maladie Ma, 20% ont une maladie Mb et parmi les individus non atteints de la maladie Ma, 4% ont la maladie Mb. On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les évènements suivants: "l'individu est atteint de la maladie Ma", "l'individu est atteint de la maladie Mb".
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A}) = 0{,}2 \times 0{,}15 + 0{,}04 \times 0{,}85 = 0{,}064$,
soit 6,4% des individus de la population sont atteint de la maladie Mb.

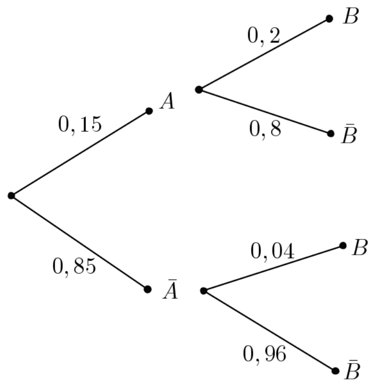
3. Indépendance d'événements

Définition: On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Propriétés : Soient A et B deux événements de l'univers, de probabilité non nulle. A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$. A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.
Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
Démonstration en exercice.

4. Arbres de probabilités

Règles d'utilisation: La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet événement.

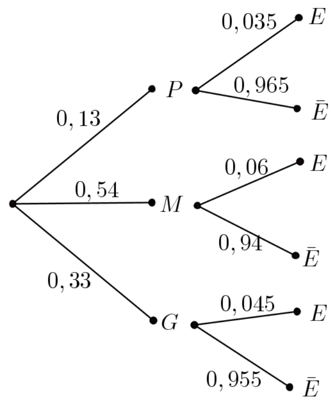
Premier exemple : voici l'arbre de probabilité correspondant à l'exemple de la partie C. 2 :



Autre exemple : Dans une région ostréicole, on s'intéresse à la production d'huîtres. Une partie de la production est conditionnée par calibre, en bourriche étiquetées : P (petite), M (moyenne) et G (grande).
la proportion d'huîtres de chaque catégorie est :
pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ; pour les grandes 33 %. Par ailleurs, la probabilité d'erreur lors d'un tri est estimée en fonction de la catégorie de la façon suivante :

Catégorie	P	M	G
Probabilité d'erreur	0,035	0,06	0,045

L'arbre de probabilités correspondant est:



Si E est l'événement : « une huître a été mal triée », alors la probabilité de E est
$P(E) = P(E \cap P) + P(E \cap M) + P(E \cap G) =$
$0{,}13 \times 0{,}035 + 0{,}54 \times 0{,}06 + 0{,}33 \times 0{,}045 = 0{,}0518$.
La probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée est égale à $P_E(M) = \dfrac{P(M \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}54 \times 0{,}06}{0{,}0518} = 0{,}625$.

D. Variables aléatoires :

Si, à chaque issue e_i de l'expérience aléatoire, on associe un réel x_i, on définit alors une variable aléatoire X, qui à e_i associe x_i.
La variable aléatoire X prend les valeurs x_i avec les probabilités p_i.
On note : $P(\{X = x_i\}) = p_i$. On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité P' , appelé loi de la variable aléatoire X.
On définit alors : **L'espérance mathématique** de X, notée E(X), comme la moyenne pondérée des x_i affectés des coefficients p_i : $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i$.
La variance de X, notée V(X), comme la moyenne des carrés des écarts à la moyenne des x_i :
$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^2 - E(X)^2$.
L'écart-type de X , noté s(X), comme la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires sur la même expérience et un réel a ; on a
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$; $E(aX) = aE(X)$; $V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$;
$V(aX) = a^2V(X)$; $V(X + a) = V(X)$; $s(X + a) = s(X)$; $s(aX) = |a|s(X)$.

Exemple: On considère deux sacs contenant des jetons numérotés; dans le sac n° 1, les jetons portent les numéros 1, 2, 3, 4 et dans le sac n° 2, les jetons portent les numéros 3, 4, 5 et 6.
L'expérience consiste à tirer un jeton de chaque sac.
1. La variable aléatoire X est égale à la somme des numéros des deux jetons tirés et la variable aléatoire Y est égale au produit des numéros des deux jetons tirés..
a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X et la loi de la variable aléatoire Y.
b) Déterminer l'espérance mathématique et l'écart-type de X et de Y.

Variables aléatoires indépendantes :

Définition: Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers . X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et Y prend les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$.On dit que X et Y sont indépendantes si pour tous i et j ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq i \leq m$) , les événements ($X = x_i$) et ($Y = y_j$) sont indépendants.