# COURS TERMINALE STD2A LES SUITES NUMÉRIQUES

## A. Notation - Définition

*Définition* : une suite numérique $(u_n)$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $(u_n)$ la suite de nombres $u_0$, $u_1$, $u_2$,..., $u_n$, ... Le nombre $u_n$ est le terme d'indice $n$ (ou de rang $n$).
$u_0$ est le premier terme de la suite.

*Exemples* : $u_n = 3^n$ ( formule explicite en fonction de $n$ ) , $u_n = (1 + 5/100)^n$ , $u_{n+1} = 3u_n + 2$ et $u_0$ donné ( formule récurrente : un terme de la suite s'écrit en fonction du ou des précédents ),
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0$ donné ...

## B. Les suites arithmétiques

On appelle moyenne arithmétique de deux nombres $a$ et $b$ le nombre $\frac{a+b}{2}$ .

La suite $(u_n)$ est une suite arithmétique s'il existe un nombre réel $r$ tel que pour tout entier naturel $n$ , $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel $r$ est appelé la raison de la suite.
Le terme $u_1$ est la moyenne arithmétique des termes $u_0$ et $u_2$ .

*Propriétés* : Pour tout entier naturel $n$, $u_n = u_0 + nr$ . Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ , $u_n = u_p + ( n - p )r$ .
Somme de $n$ termes consécutifs d'une suite arithmétique : S = $n$ × (demie somme des termes extrêmes) .

*Exemples* : $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$ ;

la somme des $n$ premiers entiers consécutifs non nuls est égale à $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Démonstration* : On écrit la somme de deux façons différentes : $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$
$S = n + (n - 1) + (n - 2) + ... + 2 + 1$.
On effectue la somme terme à terme ; on obtient :
$2\times S = 1 + n + 2 + (n - 1) + 3 + (n - 2) + ... + (n - 1) + 2 + n + 1$
on simplifie : $2S = n + 1 + n + 1 + n + 1 + ... + n + 1 = n(n + 1)$ ; donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$ .

## C. Les suites géométriques

On appelle moyenne géométrique de deux nombres positifs $a$ et $b$ le nombre $\sqrt{ab}$ .
La suite $(u_n)$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel $q$ tel que pour tout naturel $n$ , $u_{n+1} = qu_n$ .
Le réel $q$ est appelé la raison de la suite.
Le terme $u_1$ est la moyenne géométrique des termes $u_0$ et $u_2$ .
Dans ce paragraphe, on ne traite que des suites géométriques à termes positifs ( $u_0 \geq 0$ et $q > 0$).

*Propriétés* : Pour tout entier naturel $n$ , $u_n = u_0 \times q^n$ . Pour tous entiers naturels $n$ et $p$ , $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$ .
Somme de $n$ termes consécutifs d'une suite géométrique : Si $q \neq 1$, S = premier terme × $\frac{1-q^n}{1-q}$

et si $q = 1$, S = $n$ × premier terme.

*Exemples* : (si $q \neq 1$), $u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

*Démonstration* : Pour tout réel $x$, on a $x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x + 1)$ (vérification par développement). D'où, si $x \neq 1$, $\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x + 1$ ; d'où le résultat.