EXERCICES TERMINALE S GEOMETRIE

EXERCICE 1 : *A, B, C* et *D* sont quatre points non coplanaires de l'espace.
I et *J* sont les milieux respectifs des segments [*AB*] et [*CD*].
m étant un réel non nul, G_m est le barycentre des quatre points *A, B, C* et *D* affectés respectivement des coefficients 1, 1, *m*-2 et *m.*
1. On construit le point G_m dans deux cas particuliers: a) *m*=2; b) *m*=1.
c) Montrer que G_2 est le milieu du segment $[G_1 J]$.
2. Montrer que $\overrightarrow{IG_m} = \dfrac{(m-2)\overrightarrow{IC}+m\overrightarrow{ID}}{2m}$.
En déduire que l'ensemble *S* des points G_m , lorsque *m* décrit **R-{**0**}**, est inclus dans un plan que l'on précisera.
3. Montrer que $m\overrightarrow{JG_m}$ est un vecteur constant. En déduire l'ensemble *S.*

EXERCICE 2 : On considère un triangle *ABC* isocèle rectangle en *A* (*AB*=*AC*=*a, a* > 0) et le repère orthonormal (*A,* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *)* tel que : $\overrightarrow{AB} = a\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = a\,\vec{j}$. Soit *M(x,y)* un point intérieur au triangle.
1. Exprimer en fonction de *x* et *y* les aires α, β, χ des triangles *MBC, MCA, MAB.*
2. Vérifier que *M* est le barycentre de (*A*,α*), (B,*β*), (C,*χ*).*
3. La droite (*MA*) coupe (*BC*) en *A'*; la doite (*MB*) coupe (*AC*) en *B';* la droite (*MC*) coupe (*AB*) en *C'.*
On pose $S = \dfrac{MA}{MA'}+\dfrac{MB}{MB'}+\dfrac{MC}{MC'}$ et on se propose de déterminer un point *M* tel que *S* soit minimale.
a)Montrer que $\dfrac{MA}{MA'}=\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}$.
b) En déduire que $S = \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\beta}$.
4. a) Etudier les variations de la fonction *f* définie sur]0; +∞[par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
b) En déduire que : pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 2$; et que $f(x) = 2$ si et seulement si $x = 1$.
5. a) Déduire des questions 3 et 4 que : *S* est minimale si et seulement si $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha} = 1$.
b) En déduire la position du point *M* pour que *S* soit minimale.

EXERCICE 3 : Soit *ABC* un triangle; *AB*=*c*, *BC*=*a*, *AC*=*b*.
1. On désigne par *U* le barycentre de (*B*,*b*) et (*C*,*c*).
On définit les points *B'* et *C'* par $AB' = \dfrac{b}{b+c}AB$ et $AC' = \dfrac{c}{b+c}AC$.
Quelle est la nature du quadrilatère *AB'UC'* ?
En déduire que la droite (*AU*) est la bissectrice intérieure issue de *A* dans la triangle *ABC.*
2. Montrer alors que le centre du cercle inscrit du triangle *ABC* est le barycentre de (*A*,*a*), (*B*,*b*) et (*C*,*c*).

EXERCICE 4 : A et B sont deux points distincts du plan. C est le barycentre de {(A,1);(B,3)}, D est le barycentre de {(A,324);(B,-648)} et E vérifie: $2\,\overrightarrow{AE} + 3\,\overrightarrow{BE} = 0$.
1. Construire les points C et D.
2. Déterminer deux réels *a* et *b* tels que E soit le barycentre de {(A,*a*);(B,*b*)}. Construire E.

EXERCICE 5 : Dans le plan muni du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points A(-1 ; 2), B(2 ; 1), C(3 ; 4) et D(-1 ; 7).
1. Comment choisir le réel k pour que le barycentre G du système {(A,1); (B,2); (C,1); (D,k)} existe?
2. Déterminer k pour que G soit le milieu de [AC].