Exercice 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
a) Calculer la dérivée de cette fonction et déterminer les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
b) Pour quelles valeurs de x obtient-on $f(x) = 3$?
c) En quelle valeur de x la tangente à la courbe est-elle horizontale ?

Exercice 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -0{,}08t^2 + t$.
a) Calculer la dérivée de cette fonction et déterminer les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
b) Pour quelles valeurs de t a-t-on $f(t) = 1$?
c) Quelle est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse solution de la question b ?

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$.
a) Calculer la dérivée de cette fonction et déterminer les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
b) Préciser les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses -2, 0 et 1.
c) Tracer la courbe représentative de la fonction f et les tangentes précédentes dans un repère adéquat.
d) Préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on ne demande pas de les calculer).

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
a) Calculer la dérivée de cette fonction et factoriser cette fonction dérivée.
b) Déterminer les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
c) Dresser le tableau de variations de f.
Déterminer le nombre dérivé de la fonction aux points d'abscisse 1, 2 et -1.

Exercice 5 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1)^2$.
a) Calculer la dérivée de cette fonction et factoriser cette fonction dérivée.
b) Déterminer les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
c) Préciser les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0, $\frac{1}{2}$ et 1.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f et les tangentes précédentes dans un repère adéquat.
e) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
e) Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $[\,0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.
a) Représenter graphiquement cette fonction sur la calculatrice dans le cadre : $0 \leqslant x \leqslant 6$ et $0 \leqslant y \leqslant 10$.
b) Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la fonction et sur ses extremums ?
c) Calculer la dérivée de cette fonction .
d) Déterminer les variations de cette fonction sur $]\,0; +\infty[$. La conjecture établie en b) est-elle vraie ?
e) Préciser les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 1 et 4.
f) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 7 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2+5x-2}{x}$.
a) Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
b) Trouver une autre écriture de cette fonction f sur son ensemble de définition D_f.
b) Calculer la dérivée de cette fonction .
c) Déterminer les variations de cette fonction sur D_f.
e) Préciser les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 0 et 3.
f) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 8 :

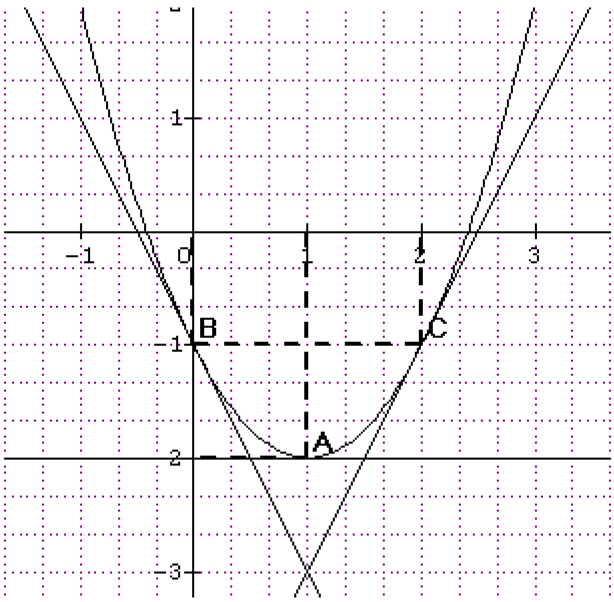
Partie I : On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [0 ; 10] par $f(x) = x^2 - 10x + 100$.
1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I et montrer qu'elle admet un minimum que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 81$.

Partie II : On considère un triangle équilatéral ABC dont les côtés ont pour longueur 10 centimètres. Le point I est le milieu de [AB] et M est un point du segment [AB]. Le point N est le point du segment [AC] tel que AN = AM .
Le point H est le pied de la hauteur issue de N dans le triangle ANB.
1. Faire une figure.
2. L'objectif de cette question est de déterminer par le calcul le point M du segment [AB] pour lequel la distance BN est minimale. Les distances sont exprimées en centimètres.
On pose AM $= x$.
a. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x .
b. Déterminer en fonction de x la distance HB.
c. Montrer que HN $= \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$.
d. Montrer que BN² = $f(x)$.
e. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment [AB] pour lequel BN² est minimal.
3. L'objectif de cette question est de retrouver géométriquement le résultat de la question précédente.
a. Montrer que la distance BN est minimale lorsque l'angle $\widehat{\text{ANB}}$ est droit.
b. Vérifier que l'on retrouve bien la réponse à la question 2.

Exercice 9 :

1. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2 - x - 2$.
a) Calculer la dérivée de f.
b) Étudier le signe de cette dérivée.
c) Dresser le tableau de variation de f, calculer la valeur de l'extremum de f.
d) Résoudre $f(x) = 0$.
e) En déduire que $f(x) < 0$ signifie que $x \in]-1 ; 2[$.
2. On considère la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 2$.
a) Montrer que la dérivée de $g(x)$ est $3f(x)$.
b) En déduire le tableau de variation de g.
c) Calculer les extremums locaux de g.

Exercice 10 :
La courbe C ci-contre est le graphe d'une fonction f définie sur [–1 ; 3]. On a tracé les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0 , 1 et 2.
1. Déterminer graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
3. Déterminer une équation de la tangente à C en B.
4. On précise que la fonction représentée est définie par $f(x) = x^2 + bx + c$ où b et c sont deux réels.
En utilisant les résultats précédents, déterminer b et c.
5. Vérifier alors que $f(1+\sqrt{2}) = 0$ et que $f(1-\sqrt{2}) = 0$.
6. A l'aide de ces résultats et du graphique, dresser le tableau de signe de f sur [–1 ; 3].
7. La fonction f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle [–1 ; 3].
Donner le tableau de variation de F sur l'intervalle [–1 ; 3].



Il s'agit de résoudre des problèmes en utilisant les fonctions, et l'étude de ces fonctions :

Exercice 1

Quelles dimensions doit-on donner à une boîte fermée de volume 8 dm^3 ayant une base carrée pour que sa construction demande le moins de matériau possible ? (Négliger l'épaisseur du matériau et les chutes) ?

Exercice 2

On considère le carré ABCD tel que AB = 1 et le cercle de centre D et de rayon 1.
On considère un point T sur l'arc de cercle AC (distinct de A et de C) intérieur au carré.
La tangente au cercle en T coupe [AB] en M et [BC] en N.
On cherche la position de T pour que la distance MN soit minimale .
Pour cela, on pose AM = x et CN = y . Calculer MN en fonction de x et de y .
Trouver une relation entre x et y , puis trouver la distance MN en fonction de x .

Exercice 3

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :
Sur chaque page, le texte est imprimé dans un rectangle de 300 cm² ;
Les marges doivent faire 1,5 cm sur les bords horizontaux et 2 cm sur les bords verticaux.
Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?
Pour cela, trouver une relation entre la longueur et la largeur d'une page, et écrire l'aire d'une page en fonction de l'une des dimensions.

Exercice 4

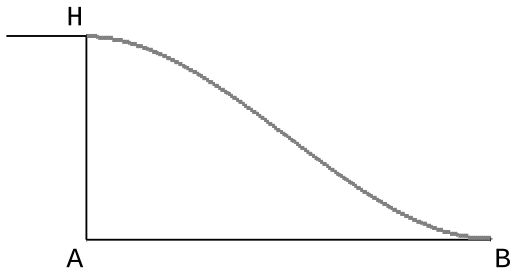
Une société qui organise des excursions en autocar a remarqué que, lorsqu'elle demande 9 euros par personne, le nombre moyen de clients est de 1000 par semaine, et lorsqu'elle demande 7 euros, le nombre moyen passe à 1500 par semaine. En supposant que la fonction de demande est affine, à combien la société doit-elle fixer le prix de l'excursion pour maximiser sa recette hebdomadaire ?

Exercice 5

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 5 et AD = 3. Le point M est un point du segment [AB] tel que la distance AM = x soit inférieure ou égale à 3. Les points N, P et Q sont tels que : N est sur [BC] et BN = x , P est sur [CD] et CP = x , Q est sur [DA] et DQ = x .
1. Calculer les longueurs des côtés du quadrilatère MNPQ en fonction de x. Quelle est la nature de MNPQ ?
2. On note $p(x) = MN^2 + NP^2$. Déterminer x pour que $p(x)$ soit minimal.
3. On note $g(x)$ l'aire de MNPQ. Déterminer x pour que l'aire de MNPQ soit minimale.
4. Déterminer x pour que cette aire soit égale à la moitié de celle du rectangle.

Exercice 6

On veut installer une rampe pour franchir une marche à des chariots, comme indiqué sur la figure ci-contre, où AB = 1m et AH = 0,5 m . Cette rampe doit être tangente au sol en B et tangente à la marche supérieure en H.
On choisit un repère orthonormé d'origine A et suivant les directions orthogonales (AB) et (AH).
On cherche une fonction correspondant à l'allure de la rampe dans le repère choisi.



On peut considérer la fonction cherchée comme étant un polynôme P du troisième degré, soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Le problème revient donc à déterminer les valeurs a, b, c, d .
1. Déterminer P(0), P'(0), P(1), P'(1) en utilisant les contraintes définies plus haut.
2. Résoudre alors le problème.

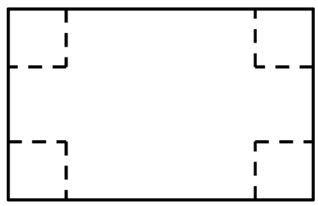
On verra plus tard, que d'autres types de fonctions peuvent aussi convenir…

Exercice 7
Dans le domaine de l'économie, on parle de la fonction coût C(x) qui correspond au coût de fabrication de x unités de production d'une entreprise; le coût moyen $c(x) = C(x)/x$ correspond au coût moyen d'une unité ; la recette R(x) est la somme reçue pour la vente de x unités ; le bénéfice $B(x) = R(x) – C(x)$;
le coût d'une unité supplémentaire est approximativement égal au coût marginal qui est la dérivée de C(x) .
Exemples : 1. Un fabricant de lecteurs de cartes magnétiques dont les coûts mensuels fixes de production s'élèvent à 8400 euros et le coût de production à 10 euros l'unité, les vend 17 euros pièce. Déterminer le coût total, le coût moyen, la recette et le bénéfice en fonction de x (nombre d'unités). Combien de lecteurs doit-il vendre pour être en équilibre financier ?
2. Un ébéniste fabrique des meubles de style XVIIIème siècle ; il estime le coût mensuel de fabrication de x meubles à $C(x) = x^3 – 3x^2 - 80x + 500$ et les vend 2440 euros l'unité. Combien doit-il produire et vendre de meubles par mois pour maximiser son bénéfice ? Quel est alors le montant de ce bénéfice ?
3. La demande de x unités d'un produit est relié à son prix de S euros pièce par l'équation : $2x + S^2 – 12000 = 0$.
Déterminer les valeurs de x qui conduisent à une recette maximale, et le montant de cette recette.

Exercice 8
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = – x^4 +2x^2 + x$.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A d'abscisse – 1.
Montrer que cette droite T est aussi tangente en un autre point de la courbe.

Exercice 9
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 – x^2 + 1$.
1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Dans un repère orthonormé du plan, on considère la parabole P d'équation $y = 1 – x^2$ et M un point de cette parabole.
3. Montrer que $OM^2 = f(x)$.
4. Déterminer les coordonnées des points de la parabole tel que la distance de O à ces points soit minimale.

Exercice 10
On réalise une boîte parallélépipédique à partir d'un rectangle de dimensions 5 et 8 cm, en découpant quatre carrés dans les coins du rectangle de même dimensions. Voir la figure ci-contre.
Quelle doit être la dimension d'un carré pour que le volume de la boîte soit maximal ?



Exercice 11
But : Comment fabriquer une casserole de 1 litre avec le moins de métal possible ?
On ne s'occupe pas du manche de la casserole.
On note x le rayon du disque de base et h la hauteur de la casserole.
1. Déterminer l'aire totale S(x) de la casserole composée de l'aire du disque et de l'aire latérale correspondant à un cylindre. Préciser l'ensemble de définition de cette fonction S.
2. Étudier les variations de la fonction S sur son ensemble de définition .
3. En déduire le minimum de la fonction S, la valeur de x correspondante et la valeur de h correspondante.
Que remarque-t-on ?